$\boxed{1}$ （30 点）

座標空間における次の 3 つの直線 l，m，n を考える：

l は点 A(1，0，−2) を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B(1，2，−3) を通り，ベクトル $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C(1，−1，0) を通り，ベクトル $\overrightarrow{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．

このとき，PQ^2+PR^2 を最小にするような P と，そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ．

《解答》

$l:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ -2)+s(2,\ 1,\ -1)$ （s は実数）

$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ -3)+t(1,\ -1,\ 1)$ （t は実数）

$n:(x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ 0)+u(1,\ 2,\ 1)$ （u は実数）

P は l 上の点より $(1+2s,\ s,\ -2-s)$ とおくことができ，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とすると，Q は m 上，R は n 上であるから，

$$\mathrm{Q}(1+t,\ 2-t,\ -3+t),\ \mathrm{R}(1+u,\ -1+2u,\ u)$$

とおけ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-2s,\ -t-s+2,\ t+s-1),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(u-2s,\ 2u-s-1,\ u+s+2)$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\overrightarrow{w}$$

であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{v}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{w}=0\end{cases}\iff\ t=1,\ s=2u\ \ \cdots\cdots\cdots①$$

である．

よって，

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2=\{(t-2s)^2+(2-t-s)^2+(-1+t+s)^2\}$$
$$+\{(u-2s)^2+(-1+2u-s)^2+(2+u+s)^2\}$$

であり，① を用いると

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2=\frac{21}{2}s^2+7$$

である．

ゆえに，PQ^2+PR^2 は $s=0$ すなわち P(1，0，−2) のとき最小であり，その最小値は

7 ………（答）

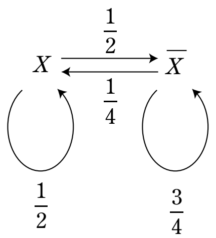
である．

$\boxed{2}$ （30 点）

2 つの粒子が時刻 0 において △ABC の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

《解答》

時刻 0 の n 秒後（n は 0 以上の整数）に 2 つの粒子が同じ頂点に位置している事象を X とすると，遷移は次のようになる．



よって

$$p(n+1)=p(n)\times\frac{1}{2}+\{1-p(n)\}\times\frac{1}{4}$$

$$\iff\quad p(n+1)=\frac{1}{4}p(n)+\frac{1}{4}$$

$$\iff\quad p(n+1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{p(n)-\frac{1}{3}\right\}$$

が成り立つ．

条件より，$p(0)=1$ であるから，求める確率 $p(n)$ は

$$p(n)-\frac{1}{3}=\left\{p(0)-\frac{1}{3}\right\}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\iff\quad p(n)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．

3　　（35 点）

△ABC は，条件 $\angle B=2\angle A$, $BC=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，$\cos\angle B$ を求めよ．

《解答》

$\angle A=\theta$ とすると，条件より

$$\angle B=2\angle A=2\theta$$

であり，$\angle C=\pi-3\theta$ であるから

$$0<3\theta<\pi \iff 0<\theta<\frac{\pi}{3}$$

である．

△ABC において，正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{1}{\sin\theta} \iff AB=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta$$

であるから，△ABC の面積を $S(\theta)$ とすると

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(3-4\sin^2\theta)\cdot\sin2\theta\\&=\frac{1}{2}(1+2\cos2\theta)\sin2\theta\\&=\frac{1}{2}(\sin2\theta+\sin4\theta)\end{aligned}$$

である．これより

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\cos2\theta+2\cos4\theta\\&=4\cos^2 2\theta+\cos2\theta-2\end{aligned}$$

である．

ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ より，

$$-\frac{1}{2}<\cos2\theta<1$$

である．$4x^2+x-2=0$ を解くと，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$$

であり，

$$\frac{-1-\sqrt{33}}{8}<-\frac{1}{2}<\frac{-1+\sqrt{33}}{8}<1$$

であるから，$S'(\theta)=0$ つまり

$$\cos2\theta=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$$

となる θ の値 $\theta=\alpha$ が $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ にただ 1 つ存在する．

これを用いると，$S(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗		↘	

よって，$\theta=\alpha$ のとき $S(\theta)$ は最大値をとる．求める $\cos\angle B$ の値は

$$\begin{aligned}\cos\angle B&=\cos2\alpha\\&=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\end{aligned}$$

である．

4

(35 点)

実数の定数 a , b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a\ ,\ b)$ の範囲を図示せよ．

《解答》

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\iff \{f(x)+1\}\{f(x)-1\}\{f(x)-2\}\geqq 0$$

$$\iff -1\leqq f(x)\leqq 1,\ 2\leqq f(x)$$

である．

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

の分母について

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

である．また，$f(x)$ は連続で

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

であるから，すべての実数 x に対して不等式 ① が成り立つための条件は

$$-1\leqq f(x)\leqq 1$$

がすべての実数 x で成り立つことである．すなわち，

$$-1\leqq f(x)\leqq 1$$

$$\iff -1\leqq\frac{ax+b}{x^2+x+1}\leqq 1$$

$$\iff -(x^2+x+1)\leqq ax+b\leqq x^2+x+1$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(a+1)x+b+1\geqq 0 \\ x^2-(a-1)x-b+1\geqq 0 \end{cases}$$

がすべての実数 x で成り立つことである．

$$x^2+(a+1)x+b+1=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{4}+b+1$$

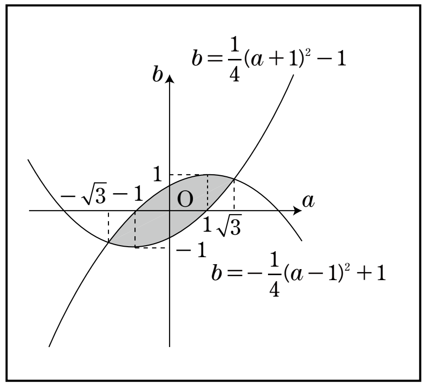
$$x^2-(a-1)x-b+1=\left(x-\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{(a-1)^2}{4}-b+1$$

より，求める a，b の条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{(a+1)^2}{4}+b+1\geqq 0 \\ -\dfrac{(a-1)^2}{4}-b+1\geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b\geqq\dfrac{1}{4}(a+1)^2-1 \\ b\leqq -\dfrac{1}{4}(a-1)^2+1 \end{cases}$$

である．これを図示すると，次図の色付き部分となる．（境界線を含む．）



5　　(35 点)

自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．

《解答》

整数 n に対して

$(3n\pm1)^3=27n^3\pm27n^2+9n\pm1$　（複号同順）

であるから，整数 k，l に対して

$(3k+1)^3+(3l+1)^3$ を 3 で割った余りは 2

$(3k-1)^3+(3l-1)^3$ を 3 で割った余りは 1

$(3k+1)^3+(3l-1)^3$ を 3 で割った余りは 0

である．

よって，3 の倍数ではない 2 つの自然数 a，b に対し，a^3+b^3 が 3 の倍数となるのは，a，b を 3 で割った余りが異なる場合に限られる．

よって

$a=3A+1$，$b=3B-1$　（A，B は $A\geqq0$，$B\geqq1$ を満たす整数）

として，一般性を失わない．

このとき

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(3A+1)^3+(3B-1)^3\\&=27(A^3+B^3)+27(A^2-B^2)+9(A+B)\\&=9(A+B)\{3(A^2-AB+B^2)+3(A-B)+1\}\end{aligned}$$

であり，A^2-AB+B^2，$A-B$ はともに整数であるから

$3(A^2-AB+B^2)+3(A-B)+1$

は 3 の倍数ではない．

よって，a^3+b^3 が 81 の倍数になるための条件は $A+B$ が 9 の倍数であることである．

(i)　$A+B=9$ のとき

$(A,\ B)=(0,\ 9),\ (1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (7,\ 2),\ (8,\ 1)$

$\therefore$　$(a,\ b)=(1,\ 26),\ (4,\ 23),\ (7,\ 20),\ (10,\ 17),\ (13,\ 14),\ (16,\ 11),\ (19,\ 8),\ (22,\ 5),\ (25,\ 2)$

であり，これらの中で a^2+b^2 が最小となるのは

$(a,\ b)=(13,\ 14)$

のときで，このとき

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=13^2+14^2\\&=365\end{aligned}$$

である．

(ii)　$A+B\geqq18$ のとき

A，B の少なくとも一方は 9 以上であるから，a，b の少なくとも一方は $3\cdot9-1=26$ 以上である．よって

$a^2+b^2\geqq26^2>365$

である．

(i)，(ii) より，a^2+b^2 は $(a,\ b)=(13,\ 14),\ (14,\ 13)$ のとき

最小値 $a^2+b^2=365$

をとる．

$\boxed{6}$ （35 点）

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

《解答》

$\mathrm{A}\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ とおくと，直線 OA の傾きは $\dfrac{1}{t^2}$ である．

$$y=\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ y'=-\frac{1}{x^2}$$

より，接線 l の傾きは $-\dfrac{1}{t^2}$ である．

対称性より，

$$\frac{1}{t^2}=\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3} \quad \text{または} \quad \frac{1}{t^2}=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore\ t^2=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{t^2}=2+\sqrt{3} \quad \text{または} \quad t^2=2+\sqrt{3},\ \frac{1}{t^2}=2-\sqrt{3}$$

である．

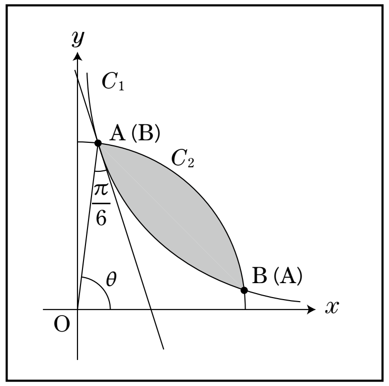
C_2 の半径を r とおくと，

$$r=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}=2$$

であるから，2 点 A，B の座標は

$$\left(2\cos\frac{5\pi}{12},\ 2\sin\frac{5\pi}{12}\right),\ \left(2\cos\frac{\pi}{12},\ 2\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

である．



よって，面積を求める図形は，図の色付き部分で，その面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{12}\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\\&\qquad-\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{5}{12}\pi\cdot 2\sin\frac{5}{12}\pi-\int_{2\cos\frac{5}{12}\pi}^{2\cos\frac{5}{12}\pi}\frac{dx}{x}\\&=\frac{2}{3}\pi-\left[\log x\right]_{2\cos\frac{5}{12}\pi}^{2\cos\frac{\pi}{12}}\\&=\frac{2}{3}\pi-\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\&=\frac{2}{3}\pi-\log\left(2+\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

である．