1

（30 点）

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ とする．x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ．

《解答》

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

① から

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

または

$$x^2+2(\tan\theta)x+3=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

である．

②，③ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$D_1/4=\cos^2\theta+\cos\theta-1$$

$$D_2/4=\tan^2\theta-3=\frac{1}{\cos^2\theta}-4$$

である．

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ より $0<\cos\theta \leqq 1$ であり

(i) $\frac{1}{2}<\cos\theta \leqq 1 \iff 0^\circ \leqq \theta < 60^\circ$ のとき

$$D_2/4<0$$

であるから，③ は異なる 2 つの虚数解を持つ．

(ii) $0<\cos\theta \leqq \frac{1}{2} \iff 60^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき

$$D_1/4=\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \leqq 1^2-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}<0$$

であるから，② は異なる 2 つの虚数解を持つ．

以上，(i)，(ii) より，① は虚数解を少なくとも 1 つ持つ．

■

2　　(30 点)

t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 P$(1\,,\ t)$ から接線を引く．

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，P$(1\,,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

《解答》

$C: y=x^3-x\,,\ \mathrm{P}(1\,,\ t)$

(1)　$f(x)=x^3-x$ とすると，$f'(x)=3x^2-1$ より曲線 C 上の点 $(u\,,\ u^3-u)$ における C の接線 l の方程式は

$y=(3u^2-1)(x-u)+(u^3-u)$

$\therefore\quad y=(3u^2-1)x-2u^3$

である．これが点 P$(1\,,\ t)$ を通るとき，

$t=(3u^2-1)\cdot 1-2u^3=-2u^3+3u^2-1$　………①

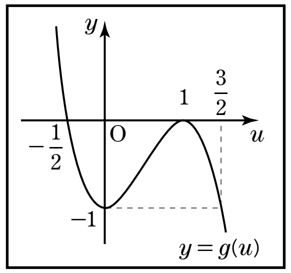
である．題意の接線がちょうど 1 本だけ引けるための条件は u の 3 次方程式①がちょうど 1 つだけ実数解を持つことである．

$g(u)=-2u^3+3u^2-1$ とおくと，t のとりうる値の範囲は，直線 $y=t$ と曲線 $y=g(u)$ がちょうど 1 つだけ共有点を持つための条件として与えられる．

$g'(u)=-6u^2+6u=-6u(u-1)$

であるから，$g(u)$ の増減は次のようになる．

u	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(u)$	↘	-1	↗	0	↘



よって，求める t の取りうる値の範囲は

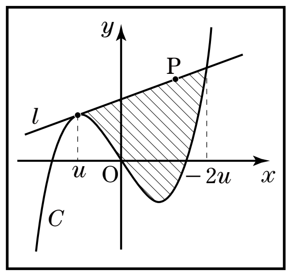
$t<-1\,,\ 0<t$　………(答)

である．

(2)

<u>(i)　$t>0$ のとき</u>

$u<-\dfrac{1}{2}$ であり，$S(t)$ は図の斜線部分の面積であるから，

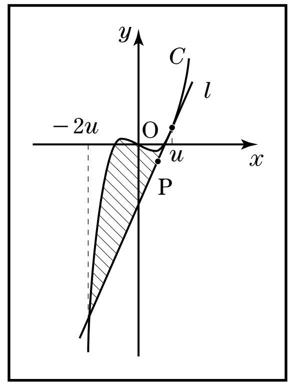


$$\begin{aligned}S(t)&=\int_u^{-2u}\left\{(3u^2-1)x-2u^3-(x^3-x)\right\}dx\\&=-\int_u^{-2u}(x-u)^2(x+2u)dx\\&=\frac{27}{4}u^4\\&>\frac{27}{64}\end{aligned}$$

が成り立つ．

<u>(ii)　$t<-1$ のとき</u>

$u>\dfrac{3}{2}$ であり，$S(t)$ は図の斜線部分の面積であるから，



$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{-2u}^{u}\left\{(x^3-x)-(3u^2-1)x+2u^3\right\}dx\\&=\int_{-2u}^{u}(x-u)^2(x+2u)dx\\&=\frac{27}{4}u^4\\&>\frac{27}{64}\times 81\\&>\frac{27}{64}\end{aligned}$$

が成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，求める $S(t)$ の取りうる値の範囲は

$S(t)>\dfrac{27}{64}$　………(答)

である．

$\boxed{3}$　　　　（30 点）

座標空間における次の３つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．

このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ．

《解答》

$l:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ -2)+s(2,\ 1,\ -1)$　（s は実数）

$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ -3)+t(1,\ -1,\ 1)$　（t は実数）

$n:(x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ 0)+u(1,\ 2,\ 1)$　（u は実数）

P は l 上の点より $(1+2s,\ s,\ -2-s)$ とおくことができ，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とすると，Q は m 上，R は n 上であるから，

$\mathrm{Q}(1+t,\ 2-t,\ -3+t)$，$\mathrm{R}(1+u,\ -1+2u,\ u)$

とおけ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-2s,\ -t-s+2,\ t+s-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(u-2s,\ 2u-s-1,\ u+s+2)$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\overrightarrow{w}$$

であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{v}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{w}=0\end{cases}\iff t=1,\ s=2u\ \cdots\cdots\cdots①$$

である．

よって，

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2=\{(t-2s)^2+(2-t-s)^2+(-1+t+s)^2\}$$
$$+\{(u-2s)^2+(-1+2u-s)^2+(2+u+s)^2\}$$

であり，① を用いると

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2=\frac{21}{2}s^2+7$$

である．

ゆえに，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は $s=0$ すなわち $\mathrm{P}(1,\ 0,\ -2)$ のとき最小であり，その最小値は

7　$\cdots\cdots\cdots$（答）

である．

$\boxed{4}$ （30点）

次の式

$$a_1=2\,,\ a_{n+1}=2a_n-1\quad(n=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい．

《解答》

(1)

$$a_{n+1}=2a_n-1$$
$$\iff\ a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

であり，

$$a_1-1=1$$

であるから，

$$a_n-1=2^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1\quad\cdots\cdots（答）$$

である．

(2)

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$
$$\iff\ (a_n-1)^2-1>10^{15}$$
$$\iff\ (2^{n-1})^2>10^{15}+1\quad\cdots\cdots①$$

である．

このとき，

$$(2^{n-1})^2>10^{15}\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ．逆にこのとき，$(2^{n-1})^2$ が偶数，10^{15} も偶数であることから

$$(2^{n-1})^2-10^{15}\geqq 2$$

となるから

② $\Rightarrow$ ①

も成り立つ．

① $\iff$ ②

であるから，求める n は②を満たす最小の自然数 n である．

②の両辺はともに正より常用対数をとって，

$$2(n-1)\log_{10}2>15$$

である．

$$n-1>\frac{15}{2\log_{10}2}$$
$$\therefore\ n>\frac{15}{2\log_{10}2}+1$$

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ より

$$\frac{15}{0.6022}<\frac{15}{2\log_{10}2}<\frac{15}{0.6020}$$

であり，

$$\frac{15}{0.6022}=24.90\cdots\cdots,\ \frac{15}{0.6020}=24.91\cdots\cdots$$

であるから，

$$25.90\cdots\cdots<\frac{15}{2\log_{10}2}+1<25.91\cdots\cdots$$

である．

よって，求める最小の自然数 n は

$$n=26\quad\cdots\cdots（答）$$

である．

$\boxed{5}$ （30 点）

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする．A，B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする．また同じ目が出た場合は，A，B ともに得点を 0 とする．このとき，A の得点の期待値を求めよ．

《解答》

A が 1 点を得ることはないから，その確率 $p(1)$ は 0 である．

A が k の目 $(2 \leqq k \leqq 20)$ を出すときを考える．A が k 点を得るのは，B が $k-1$ 以下の目を出すときであるから，その確率 $p(k)$ は

$$p(k)=\frac{1}{20}\times\frac{k-1}{20}=\frac{k-1}{400}$$

である．これは $k=1$ のときも成り立つ．

これ以外のときは A の得点は 0 であるから，その確率を q とすると，求める A の得点の期待値は，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{20}k\cdot p(k)+0\cdot q\\
&=\sum_{k=1}^{20}k\cdot\frac{k-1}{400}\\
&=\frac{1}{400}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{3}\Big\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\Big\}\\
&=\frac{1}{400}\cdot\frac{1}{3}\cdot 19\cdot 20\cdot 21\\
&=\frac{133}{20}\quad\cdots\cdots\cdots\text{（答）}
\end{aligned}$$

である．