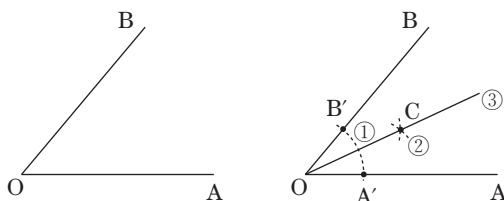


「作図」の発想を思い出そう！

吉田 信夫

大学への数学 14年2月号 掲載

中学時代に学んだ作図. 例えば, 角の二等分線の作図は,



- ① O を中心とする円を描き, OA, OB との交点をそれぞれ A' , B' とする.
- ② A' , B' を中心とする ① と同じ半径の円を描き, 2 円の交点を C とする.
- ③ O, C を結ぶ直線が, $\angle AOB$ の二等分線になる.

四角形 $OA'CB'$ が菱形 (4 辺の長さが等しい四角形) になるのがポイントである.

ここで, ① の円の半径が 1 であったら, $\vec{OA'}$, $\vec{OB'}$ は単位ベクトルになり,

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \vec{OB'} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

となる. よって,

$$\vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

であり, これが $\angle AOB$ の二等分線の方方向ベクトルになっている.

このように, 作図の発想は大学入試数学を解くときに活かることがある. それを紹介していくのが本稿の目的である. まずは 2009 年の大阪大 (理系) の問題. 純粋にベクトルの問題として解くのが標準的であるかも知れないが, ここでは敢えて作図の発想で解いてみよう.

問題 1. 平面上の三角形 OAB を考え, 辺 AB の中点を M とする.

$$\vec{a} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \vec{b} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

とおき, 点 P を $\vec{a} \cdot \vec{OP} = -\vec{b} \cdot \vec{OP} > 0$ であるよう

にとる. 直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする.

(1) $\vec{MQ}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ.

(2) $|\vec{MQ}| = \frac{1}{2}(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|)$ であることを示せ.

解 (1) (2) P は

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{OP} = 0$ を満たす.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は単位ベクトルであるから, $\vec{a} + \vec{b}$ は $\angle AOB$ の二等分線 l の方向ベクトルとなる. ゆえに, O を通り, l と垂直な直線 m (つまり外角の 2 等分線) 上に点 P はある. さらに,

$$\vec{a} \cdot \vec{OP} = -\vec{b} \cdot \vec{OP} > 0$$

より, 点 P は m 上で, l に関して A と同じ側にある.

ここで, m に関して A と対称な点 A' をとると, 三角形 OAA' は $OA = OA'$ の二等辺三角形であり, Q は辺 AA' の中点である. また, 3 点 B, O, A' は一直線上にあり,

M が辺 AB の中点であるから, 中点連結定理より, $\vec{MQ}$ と $A'B$ は平行で, $\vec{MQ}$ の長さは $A'B$ の長さの半分である.

よって, $\vec{MQ}$ と $\vec{b}$ は平行であり,

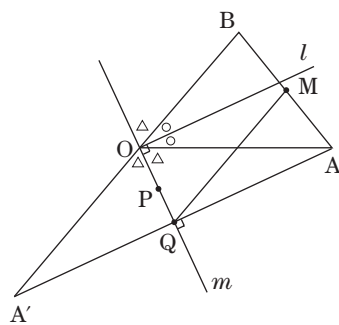
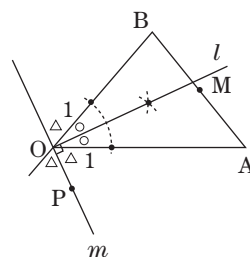
$$|\vec{MQ}| = \frac{1}{2} A'B = \frac{1}{2} (OA' + OB) = \frac{1}{2} (|\vec{OA}| + |\vec{OB}|)$$

である.

*

*

内角の二等分線の方方向ベクトル $\vec{a} + \vec{b}$ と垂直という情報から, 直線 OP が外角の二等分線 m になった.



集中講義～作図～

さらに、垂線の足 Q を考えると、 m に関する A の対称点 A' が鍵となった。これも作図のイメージからとらえたものである。つまり、 Q の作図法を考えるのである。

図のように、対称点 A' を作図してから、 A, A' を結ぶ直線と m との交点として、垂線の足 Q を得る（交点としてとらえることが大事！）。

しかも、 Q が線分 AA' の中点なので、 M が中点であることと相まって、中点連結定理を使えることに気づくことができた。

*

*

作図の考え方の基本は、点を「2 曲線の交点」と考えることである。ここでいう曲線は主に円と直線で、これらを「何らかの条件を満たす点の軌跡」と見るのである。

次は、2013 年の東京大（理科）の問題である。作図にこだわって解いていこう。（1）では単位円を利用して単位ベクトルの終点を作図してみよう。そして（2）では、どのようにしたら（1）を利用して P を作図できるかを考えよう。

問題 2. $\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\vec{AB}| = 1$,

$|\vec{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = \vec{0}$$

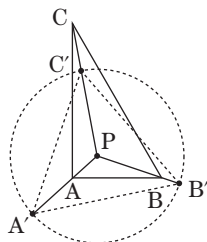
を満たすとする。

(1) $\angle APB, \angle APC$ を求めよ。

(2) $|\vec{PA}|, |\vec{PB}|, |\vec{PC}|$ を求めよ。

解 (1) $\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}, \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}, \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}$ は単位ベクトルである。点

P を始点とする位置ベクトルがこれらになるような点を順に A', B', C' とする。すると、3 点は、それぞれ、 P を始点とする半直線 PA, PB, PC と、 P を中心とする半径 1 の円の交点である。しかも、



$$\vec{PA'} + \vec{PB'} + \vec{PC'} = \vec{0} \quad \therefore \frac{\vec{PA'} + \vec{PB'} + \vec{PC'}}{3} = \vec{PP}$$

となるので、三角形 $A'B'C'$ の重心が外心 P と一致する。よって、三角形 $A'B'C'$ は正三角形である。ゆえに、

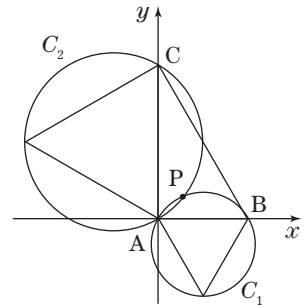
$$\angle APB = \angle APB' = 120^\circ,$$

$$\angle APC = \angle APC' = 120^\circ$$

である。

(2) 図のように座標平面上に三角形 ABC を置く。 $A(0, 0), B(1, 0), C(0, \sqrt{3})$ である。

3 点 P, A, B を通る円を C_1 とし、3 点 P, A, C を通る円を C_2 とすると、 P は 2 円 C_1, C_2 の交点である。



C_1 の描き方を考えよう。（1）より、 $\angle APB = 120^\circ$ であるから、 C_1 は「 AB を 1 辺とする正三角形を、 AB に関して C と反対側に作るとき、その外接円」になっている。そして、その正三角形の重心が C_1 の中心である。

同様に、 AC を 1 辺とする正三角形を、 AC に関して B と反対側に作るとき、その外接円が C_2 である。

よって、 C_1 は中心 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ 、半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円で、

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{1}{3}$$

である。また、 C_2 は中心 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 、半径が 1 の円で、

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$$

である。2 円の交点を求めると

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$$

であるから、 $P(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7})$ である。よって、

$$|\vec{PA}| = \sqrt{\frac{4}{7^2} + \frac{3}{7^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$|\vec{PB}| = \sqrt{\left(\frac{2}{7} - 1\right)^2 + \frac{3}{7^2}} = \sqrt{\frac{25+3}{7^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

$$|\vec{PC}| = \sqrt{\frac{4}{7^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+108}{7^2}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

である。

*

*

P は $\angle APB = 120^\circ$ かつ $\angle APC = 120^\circ$ を満たす点であ

集中講義～作図～

る。 $\angle APB = 120^\circ$ を満たす点 P の軌跡が円 C_1 である。それを描くには、正三角形を経由するのが良いだろう。 C_2 も同様に考えて、 P を「2 曲線の交点」と見ることができた。

* * *

問題 2 で登場した

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$$

となる点 P は、三角形 ABC のどの角も 120° 未満であれば、**解** の方法で作図できる。この点はフェルマー点と呼ばれている。

これについて、少し補足しよう。

三角形 ABC の外側に正三角形 ABD , ACE を描き、それらの外接

円の交点が P である。すると、「3 点 B , P , E は同一直線上」である。なぜなら、円周角の定理から

$$\angle APE = \angle APD = \angle BPD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BPE = 180^\circ$$

となるからである。

同様に、3 点 C , P , D も同一直線上にある。しかも、三角形 ABE , ADC は合同である。なぜなら、正三角形の性質から

$$AB = AD, AE = AC,$$

$$\angle BAE = \angle BAC + 60^\circ = \angle DAC$$

となり、二辺夾角相等となるからである。実際、三角形 ADC を A の周りに 60° 回転すると三角形 ABE に重なる。

同様にして、

三角形 ABC の外側に正三角形

BCF を作ると、3

点 A , P , F は同一直線上にあり、

三角形 BAF と

BDC は合同、三

角形 CAF と CEB

も合同である。

よって、 AF , BE , CD は等長である。

次々に作図していくことで、図形的な性質が分かっていくのは興味深い。 AF , BE , CD は等しいが、この長さにも面白い意味がある：

『どの角も 120° 未満の三角形 ABC の内部を動点 Q が

動くとき、3 つの線分の長さの和 $AQ + BQ + CQ$ が最小になる Q は？』を考えてみよう。

図のように正三角形 ACE を作る。三角形 AQC を A の周りに 60° 回転すると、 C は E に重なる。 Q の像を Q' とおくと、三角形 AQQ' は正三角形である。

よって、

$$AQ + BQ + CQ = QQ' + BQ + Q'E$$

であるから、これは B , Q , Q' , E が同一直線上にあるときに最小で、最小値は BE である。このとき、 Q は BE 上で、 $\angle AQE = 60^\circ$ となる。これは、フェルマー点を P とすると、 $Q = P$ ということである。

これがフェルマー点の有名な性質である。

線分の長さの和の最小値を考える問題は、端点が固定された折れ線に帰着するのが定石である。重要な端点 E を作図して、折れ線に長さを移すために、正三角形を作図したのである。

では、「2 円の交点」として点をとらえる問題をもう 1 つやってみよう。2009 年の京都大(理系)の問題である。必要と十分に分けて論証する。

問題 3. 平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり、 A' を B , C , P を通る円の中心、 B' を C , A , P を通る円の中心、 C' を A , B , P を通る円の中心とする。このとき A , B , C , A' , B' , C' が同一円周上にあるための必要十分条件は P が $\triangle ABC$ の内心に一致することであることを示せ。

解 $\angle A = 2a$, $\angle B = 2b$, $\angle C = 2c$ とおくと、

$$a + b + c = 90^\circ$$

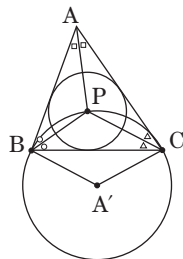
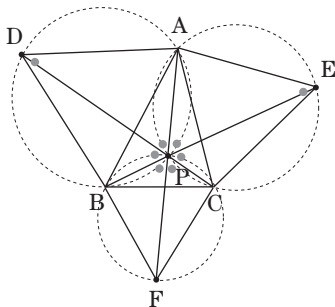
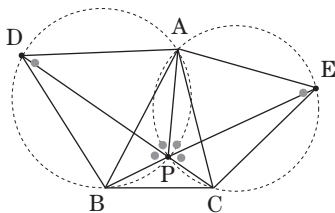
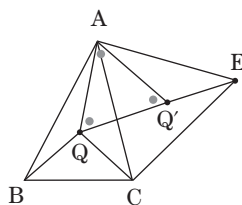
である。

まず「 P が内心であれば 6 点が同一円周上」を示す。対等性から、「 P が内心のときに 4 点 A , B , C , A' が同一円周上」を示せば十分。

内心は角の二等分線の交点なので、

$$\angle BPC = 180^\circ - (b + c) = 90^\circ + a$$

である。ゆえに、 P を含む方の弧 BC に関する円周角は



集中講義～作図～

$$180^\circ - (90^\circ + a) = 90^\circ - a$$

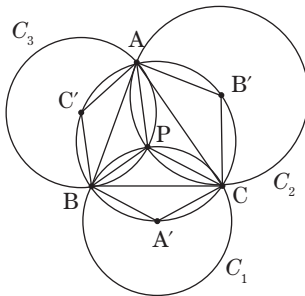
となり、中心角は $\angle BA'C = 180^\circ - 2a$ となる。ゆえに、

$$\angle BAC + \angle BA'C = 180^\circ$$

となるから、4点 A, B, C, A' は同一円周上にある。

次に、「6点在同一円周上ならば P が内心」を示す。

いま、 A' は B, C, P を通る円の中心で、三角形 ABC の外接円上にあるので、 BC の垂直二等分線と外接円の交点のうち、 BC について A と反対側にある点である。同様に、 B', C' も作図できる。



そして、中心 A' で B, C を通る円 C_1 と、中心 B' で C, A を通る円 C_2 と、中心 C' で A, B を通る円 C_3 が1点で交わり、その交点が P である。ここまでの仮定から、 P が内心であることを示す。

内心を I とおくと、先ほどの議論から

$$\angle BIC = 90^\circ + a, \angle CIA = 90^\circ + b, \angle AIB = 90^\circ + c$$

となることに注意しておく。

A, B, A', C がこの順で同一円周上にあるので、

$$\angle BA'C = 180^\circ - 2a$$

であり、円 C_1 での円周角、中心角に注目して、

$$\angle BPC = 180^\circ - (180^\circ - 2a) \div 2 = 90^\circ + a (= \angle BIC)$$

である。同様に

$$\angle CPA = 90^\circ + b (= \angle CIA),$$

$$\angle APB = 90^\circ + c (= \angle AIB)$$

である。ゆえに、 I は3円 C_1, C_2, C_3 上にある。3円の交点は P しかない (例えば、 C_1 と C_2 は C と P で交わっているのに、他に交点はない) ので、 $P = I$ である。

以上で、必要十分性が示された。

*

*

最後は空間での作図問題。2011年の京都大(理系)の問題である。空間内で2点から等距離にある点の軌跡は？

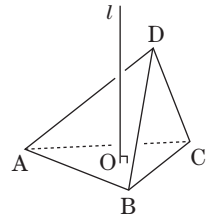
問題 4. 空間内に四面体 $ABCD$ を考える。このとき、4つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ。

解 4点 A, B, C, D から等距離にある点が存在することを示せば良い。

空間内で2点 A, B から等距離にある点の集合は、線分 AB の中点を通り、線分 AB に垂直な平面である(以後、

“線分 AB の垂直二等分平面”と呼ぶ)。この平面と平面 ABC の交わりは、平面 ABC 内での線分 AB の垂直二等分線である。

ゆえに、3点 A, B, C から等距離にある点の集合は、線分 AB 、線分 BC の垂直二等分平面の交わりで、1つの直線 l になる。



l は線分 AB, BC と垂直より、平面 ABC と垂直である。

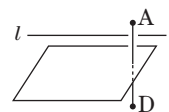
さらに、平面 ABC 内での、線分 AB 、線分 BC の垂直二等分線の交わりは三角形 ABC の外心 O である。よって、 l は「 O を通り、平面 ABC と垂直な直線」である。

この直線 l と線分 DA の垂直二等分平面が交われば、その点が四面体の外心である(「3点 A, B, C から等距離」かつ「2点 D, A から等距離」を満たす点は、「4点 A, B, C, D から等距離」にある)。

もし、直線 l と線分 DA

の垂直二等分平面が交わらないとしたら、 l は線分 DA の垂直二等分平面と平行である。つまり、 l は線分 DA と垂直である。すると、 A

もし交わらないなら…



を通して l と垂直な直線をすべて集めると平面 ABC になるので、線分 DA は平面 ABC 内にあることになる。つまり、 D は平面 ABC 上にある。しかし、これは、四面体 $ABCD$ が存在することに矛盾する。

よって、直線 l と線分 DA の垂直二等分平面が交わるのが分かり、その交点が四面体の外心になる。

以上で示された。

*

*

直線 l と線分 DA の垂直二等分平面が交わることを示して、外心の作図が可能であることを示した。これで外心の存在証明になっている。空間では、曲面と曲面の交わりで曲線ができ、曲線と曲面の交わりで点が求まる。紙の上で作図できないのでイメージを掴みにくい。図形的性質を利用して、外心の存在を示すことができたのである。

ここで用いた「3点 A, B, C から等距離にある点の軌跡は、三角形 ABC の外心を通り、平面 ABC に垂直な直線である」という事実は重要である。本問から、四面体の4面で上記の直線を考えたとき、それら4直線が四面体の外心で交わることが分かったのである。

(よしだ のぶお、予備校講師)