京大理系数学　２０１５　解答例

$\boxed{1}$

(30点)

2つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

《解答》

$$\begin{cases} y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right) \\ y=\sin 2x \end{cases}$$

の2式を連立して、

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$$

であり、$\dfrac{\pi}{8}\leqq x+\dfrac{\pi}{8}\leqq\dfrac{5\pi}{8}$、$0\leqq 2x\leqq\pi$ に注意すると、

これを満たす x は、

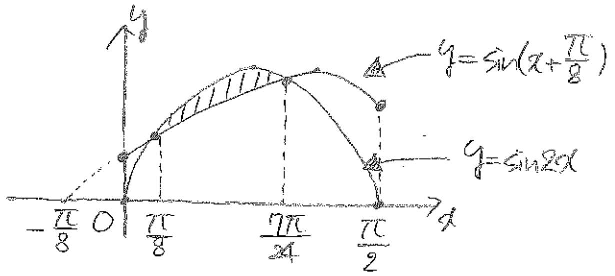
$$x+\frac{\pi}{8}=2x \iff x=\frac{\pi}{8}$$

または、

$$x+\frac{\pi}{8}=\pi-2x \iff x=\frac{7}{24}\pi$$

である。

よって、グラフは下図のようになる。



したがって、求める体積 V は、

$$V=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}\pi\left(\sin^2 2x-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left(-\cos 4x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{7}{6}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\underline{\frac{\pi}{16}}$$

である。

$\boxed{2}$ （30 点）

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である．

(b)　半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

《解答》

文系 $\boxed{2}$ と同じ．

3　（35 点）

(1)　a を実数とするとき，$(a\ ,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ１つ存在することを示せ．

(2)　$a_1=1$ として，$n=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots$ について，$(a_n\ ,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)$ を求めよ．

《解答》

(1)　$f(x)=e^x+1$ とする．曲線 $y=f(x)$ の点 $(t\ ,\ e^t+1)$ における接線の方程式は

$$l_t : y=e^t x+(1-t)e^t+1$$

である．

l_t と l_s が一致するための条件は

$$\begin{cases} e^t=e^s \\ (1-t)e^t+1=(1-s)e^s+1 \end{cases} \iff t=s$$

であるから，t の個数と接線の本数は一致する．よって，$(a\ ,\ 0)$ を通る接線の本数は

$$0=e^t a+(1-t)e^t+1$$

$$\iff a=t-1-e^{-t} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす実数 t の個数と一致する．

$g(t)=t-1-e^{-t}$ とおけば，$a=g(t)$ を満たす実数 t の個数は，$y=g(t)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数と一致する．

$$g'(t)=1+e^{-t}>0$$

であるから，$g(t)$ は単調増加．

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty\ ,\ \lim_{t\to-\infty}g(t)=-\infty$$

であるから，$g(t)=a$ となる実数 t がただ１つ存在する．

以上より，題意は示された．

(2)　$a=a_n\ ,\ t=a_{n+1}$ として，① に代入すると

$$a_n=a_{n+1}-1-e^{-a_{n+1}}$$

$$\iff a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}$$

が成り立つ．

よって，

$$a_{n+1}-a_n \geqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，n が十分大のとき

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots\cdots\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$\geqq n \quad (\because\ ②)$$

が成り立ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ である．

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+e^{-a_{n+1}}\right)=1$$

である．

$\boxed{4}$ （35 点）

一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

《解答》

$\mathrm{AQ}=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおく．$\mathrm{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$0<t\leqq 1$ のとき，△APQ，△AQD において余弦定理から

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}},\ \mathrm{QD}=\sqrt{t^2-t+1}$$

である．$\mathrm{PA}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{AD}=1$ より，これは $t=0$ のときも成立する．

よって，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，△PQD において余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\frac{-t+3}{2\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}$$

である．

$$f(t)=\frac{(-t+3)^2}{t^2-t+1}$$

とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ のとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}>0$ であるから，$f(t)$ が最大となるとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ も最大となる．

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{-2(-t+3)(t^2-t+1)-(-t+3)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}\\&=\frac{-(-t+3)\{2(t^2-t+1)+(-t+3)(2t-1)\}}{(t^2-t+1)^2}\\&=\frac{(t-3)(5t-1)}{(t^2-t+1)^2}\end{aligned}$$

より，$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

ゆえに，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{5}$ のとき，最大値をとる．

以上から，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ は

$t=\dfrac{1}{5}$ のとき　最大値 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

をとる．

$\boxed{5}$　　(35点)

a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

《解答》

2 次式 $f(x)$ を 1 次式 $g(x)$ で割った商を $\alpha x+\beta$，余りを γ とすると，

$$f(x)=g(x)(\alpha x+\beta)+\gamma$$

と表すことができる．

以下，$\gamma=0$ を示す．$x>0$ において $g(x)>0$ であるから，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{g(x)}$$

である．

与えられた条件から，正の整数 n に対して

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)}=\alpha(n+1)+\beta+\frac{\gamma}{g(n+1)},\ \frac{f(n)}{g(n)}=\alpha n+\beta+\frac{\gamma}{g(n)}$$

がともに整数である．よって，差をとって

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}=\alpha+\frac{\gamma}{g(n+1)}-\frac{\gamma}{g(n)}$$

も整数である．同様にして

$$\alpha+\frac{\gamma}{g(n+2)}-\frac{\gamma}{g(n+1)}$$

も整数である．したがって，

$$\left(\alpha+\frac{\gamma}{g(n+1)}-\frac{\gamma}{g(n)}\right)-\left(\alpha+\frac{\gamma}{g(n+2)}-\frac{\gamma}{g(n+1)}\right)$$
$$=\gamma\left(\frac{2}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{g(n+2)}\right)$$

も整数である．

ここで，

$$\frac{2}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{g(n+2)}$$
$$=\frac{1}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}+\frac{1}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n+2)}$$
$$=\frac{g(n)-g(n+1)}{g(n)g(n+1)}+\frac{g(n+1)-g(n+2)}{g(n+1)g(n+2)}$$
$$=\frac{-d}{g(n)g(n+1)}+\frac{d}{g(n+1)g(n+2)}$$
$$=d\cdot\frac{-g(n+2)+g(n)}{g(n)g(n+1)g(n+2)}$$
$$=\frac{-2d^2}{g(n)g(n+1)g(n+2)}\neq 0$$

である．

また，

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=\infty$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{g(n+2)}\right)=0$$

となるので，十分大きい n に対して常に

$$\left|\gamma\left(\frac{2}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{g(n+2)}\right)\right|<1$$

が成り立つ．$\gamma\left(\dfrac{2}{g(n+1)}-\dfrac{1}{g(n)}-\dfrac{1}{g(n+2)}\right)$ は整数であるから

$$\gamma\left(\frac{2}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{g(n+2)}\right)=0$$

であるが，$\dfrac{2}{g(n+1)}-\dfrac{1}{g(n)}-\dfrac{1}{g(n+2)}\neq 0$ であるので，

$$\gamma=0$$

である．

以上から，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることが示された．

$\boxed{6}$ (35 点)

２つの関数を

$$f_0(x)=\frac{x}{2},\qquad f_1(x)=\frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0=\frac{1}{2}$ から始め，各 $n=1$，2，… について，それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\frac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

《解答》

$0<x<1$ のとき，

$$0<f_0(x)<f_1(x)<\frac{1+1}{2}=1$$

が成り立ち，これと $x_0=\frac{1}{2}$ より，帰納的に

$$0<x_n<1$$

が 0 以上の整数 n で成立する。

$A=\{x \mid x$ は $0<x<\frac{1}{3}$ を満たす実数$\}$

$B=\{x \mid x$ は $\frac{1}{3}\leqq x<\frac{2}{3}$ を満たす実数$\}$

$C=\{x \mid x$ は $\frac{2}{3}\leqq x<1$ を満たす実数$\}$

で集合 A, B, C を定め，0 以上の整数 n に対して，

$x_n\in A$ となる確率を a_n

$x_n\in B$ となる確率を b_n

$x_n\in C$ となる確率を c_n

とおく。

$$a_0=c_0=0,\quad b_0=1$$

$$a_n+b_n+c_n=1 \quad \text{—— ①}$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

である。

$x_n\in A$ のとき，$f_0(x_n)\in A$，$f_1(x_n)\in B$

$x_n\in B$ のとき，$f_0(x_n)\in A$，$f_1(x_n)\in C$

$x_n\in C$ のとき，$f_0(x_n)\in B$，$f_1(x_n)\in C$

であるから，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) \quad \text{—— ②}$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n) \quad \text{—— ③}$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n) \quad \text{—— ④}$$

である。

①，③より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$$

$$\iff b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

であるから，数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列で，

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(b_0-\frac{1}{3}\right)$$

$$\iff b_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

である。

また，②，④と $a_0=c_0$ より，帰納的に

$$a_n=c_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つので，①より

$$a_n=\frac{1}{2}(1-b_n)$$

である。

以上より，求める確率 P_n は，

$$\begin{aligned}P_n&=a_n+b_n\\&=\frac{1}{2}(1-b_n)+b_n\\&=\underline{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\quad(n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

である。