1

(30点)

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し，その面積を求めよ．

《解答》

直線 $y=px+q$ —① が、$y=x^2-x$ のグラフと交わるので、$px+q=x^2-x \Leftrightarrow x^2-(p+1)x-q=0$ の判別式をDとして、

$D=(p+1)^2+4q \geqq 0 \Leftrightarrow q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$

であり、直線①が $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフと交わらないので、

$$y=|x|+|x-1|+1=\begin{cases} -2x+2 & (x\leqq 0) \\ 2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ 2x & (1\leqq x) \end{cases}$$

より、$-2\leqq p\leqq 2$ が必要で、

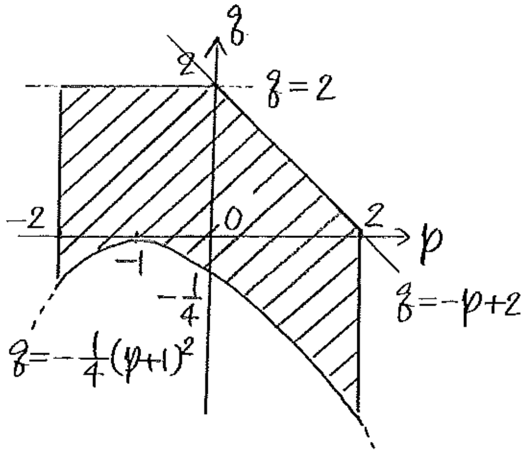
(i) $0\leqq p\leqq 2$ のとき

直線①が点$(1,2)$を通るとき，$q=-p+2$ より、$q<-p+2$ である．

(ii) $-2\leqq p\leqq 0$ のとき

直線①が点$(0,2)$を通るとき $q=2$ より、$q<2$ である．

以上より，点(p,q)の範囲を図示すると，図の斜線部分（境界は曲線 $q=-\frac{1}{4}(p+1)^2$，直線 $x=\pm 2$，を含み，他を含まない）



よって，その面積をSとすると，

$$S=\int_{-2}^{2}\left\{2+\frac{1}{4}(p+1)^2\right\}dp-2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(p^2+9)\,dp-2$$

$$=\frac{25}{3} \text{ ——（答）}$$

（ただし，「交わる」を「共有点をもつ」と解釈して解いた．）

2　　　(30 点)

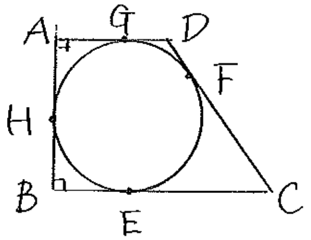
次の２つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a)　少なくとも２つの内角は 90° である．

(b)　半径１の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の４つの辺すべてに接することをいう．

《解答》

(i) 四角形の隣り合う２つの内角が 90° のとき，



図において，

$GD+EC=DF+FC$
$\quad=CD$

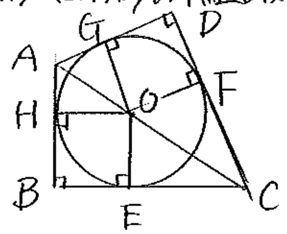
であるから，

題意の四角形の面積を S として，

$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot 2=2+CD\geqq 4$

等号成立は $CD=2$ のとき，つまり，四角形が正方形のとき

(ii) 四角形の１組の対角が，それぞれ 90° のとき，



図の対称性より

$\angle AOH=\angle OCE=\theta$

とおくと，$0°<\theta<90°$ で，

$OE=OH=1$ より，$AH=\tan\theta$，$CE=\frac{1}{\tan\theta}$

となり，

$S=2\left(1^2+\frac{1}{2}\tan\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right)$

$\quad=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

$0°<\theta<90°$ より，$\tan\theta>0$，$\frac{1}{\tan\theta}>0$ であるから，

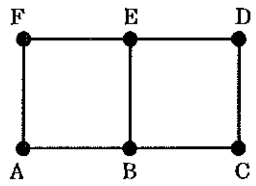
相加平均と相乗平均の関係より，

$S\geqq 2+2=4$（等号成立は $\tan\theta=1$ のとき，つまり $\theta=45°$ より四角形が正方形のとき．）

以上 (i)，(ii) より，求める最小のものの面積は 4 ――（答）

$\boxed{3}$ (30点)

6個の点A，B，C，D，E，Fが下図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率$\frac{1}{2}$で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さをXとする．そのような経路がない場合はXを0とする．このとき，$n=0$，2，4について，$X=n$となる確率を求めよ．



《解答》

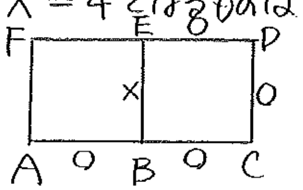
各線分を赤く塗ることを○，黒く塗ることを×と表すことにする．

・$X=2$となるものは

(AB, AF, BE, FE)
=(○,○,○,○), (○,○,○,×), (○,○,×,○),
(○×,○,○), (○,×○,×), (×,○,○,○),
(×,○,×,○)

の7通りであるから、その確率は $\frac{7}{2^4}=\frac{7}{16}$ —(答)

・$X=4$となるものは



から (AF, FE) が (○,○) 以外

よって、その確率は $\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}$ —(答)

$X=0, 2, 4$となることは、すべて互いに排反なので、

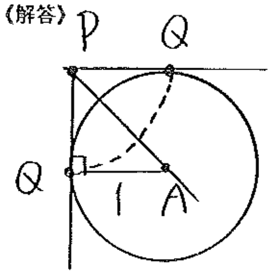
$X=0$となる確率は、余事象を考えて、

$1-\left(\frac{7}{2^4}+\frac{3}{2^7}\right)=\frac{69}{128}$ —(答)

$\boxed{4}$ (30点)

xyz 空間の中で，(0，0，1) を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が (0，0，2) 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P(1，0，2) の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

《解答》



A(0,0,1) とする．

$PA=\sqrt{2}$ であるから，l が S と接するとき $\angle APR=\angle APQ=45^\circ$ である．

よって $0^\circ \leqq \angle APR \leqq 45^\circ$ であるから

$$\cos\angle APR=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PR}|}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

R$(x,y,0)$ として

$$\frac{-1\cdot(x-1)+0\cdot y-1\cdot(-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2+(-2)^2}}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

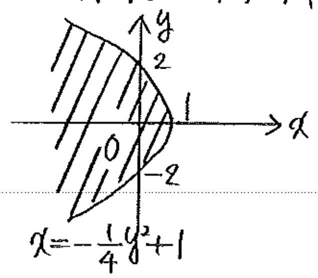
$\Leftrightarrow\ 3-x\geqq\sqrt{(x-1)^2+y^2+4}$

$\Leftrightarrow\ (3-x)^2\geqq(x-1)^2+y^2+4$ かつ $3-x\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ x\leqq-\frac{1}{4}y^2+1$ かつ $x\leqq 3$

$\Leftrightarrow\ x\leqq-\frac{1}{4}y^2+1\quad(\because -\frac{1}{4}y^2+1\leqq 1)$

これを図示すると，図の斜線部分（境界を含む）



$\boxed{5}$ （30点）

a，b，c，d，e を正の有理数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，

$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

《解答》

2 次式 $f(x)$ を 1 次式 $g(x)$ で割った商を $\alpha x+\beta$，余りを γ とすると，
α，β，γ は有理数であり，

$$f(x)=g(x)(\alpha x+\beta)+\gamma$$

と表すことができる．

以下，$\gamma=0$ を示す．$x>0$ において $g(x)>0$ であるから，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{g(x)}$$

である．

α，β は有理数より，

$$\alpha=\frac{q}{p},\ \beta=\frac{q'}{p'}\quad （p，p' \text{ は正の整数，} q，q' \text{ は整数}）$$

とおくと

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{q}{p}x+\frac{q'}{p'}+\frac{\gamma}{dx+e}$$

となる．

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{q}{p}n+\frac{q'}{p'}+\frac{\gamma}{dn+e}$$

が整数であることから，これを pp' 倍した

$$p'qn+pq'+\frac{pp'}{dn+e}\gamma$$

も整数である．p，p'，q，q'，n が整数なので，$p'qn+pq'$ も整数であるから，

$$\frac{pp'}{dn+e}\gamma$$

も整数である．

$$|dn+e|>|pp'\gamma|$$

を満たすような十分大きな n に対し常に

$$\left|\frac{pp'}{dn+e}\gamma\right|<1$$

が成り立つので，

$$\frac{pp'}{dn+e}\gamma=0$$

である．ところが，p，p'，d，e，n は正の数より

$$\frac{pp'}{dn+e}>0$$

となるから，

$$\gamma=0$$

である．

以上から，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることが示された．