$\boxed{1}$ （30 点）

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

《解答》

(1)

$$\begin{aligned}f'_n(\theta)&=-\sin\theta\cdot\sin^{n-1}\theta+(1+\cos\theta)\cdot(n-1)\sin^{n-2}\theta\cos\theta\\&=\{-\sin^2\theta+(n-1)(\cos\theta+\cos^2\theta)\}\sin^{n-2}\theta\\&=\{n\cos^2\theta+(n-1)\cos\theta-1\}\sin^{n-2}\theta\\&=(n\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\sin^{n-2}\theta\end{aligned}$$

である．n は 2 以上の自然数であるから

$$0<\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{2}$$

であり，

$$\cos\theta=\frac{1}{n}$$

となる θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在する．この θ を α とすると，

$$\cos\alpha=\frac{1}{n},\ \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

である．

$$\cos\theta+1\geqq0,\ \sin^{n-2}\theta\geqq0$$

であるから，$f_n(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに，$f_n(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のとき，最大値

$$\begin{aligned}M_n&=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

をとる．

(2)　$M_n>0$ であるから，$(M_n)^n>0$ である．よって，自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log(M_n)^n&=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^{n-1}\\&=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{n-1}{2n}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\\&=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log(M_n)^n&=\log e-\frac{1}{2}\log e\\&=\log\sqrt{e}\end{aligned}$$

であるから，指数関数の連続性より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(M_n)^n&=\lim_{n\to\infty}e^{\log(M_n)^n}\\&=e^{\log\sqrt{e}}\\&=\sqrt{e}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{2}$ (30 点)

素数 p , q を用いて

$$p^q+q^p$$

と表される素数をすべて求めよ．

$p \leqq q$ として一般性を失わない。

p, q がいずれも2, またはいずれも奇素数のとき,

$$p^q+q^p \geqq 4$$

であり, かつ p^q+q^p は偶数であるから不適である。

よって

$$p=2 \quad \text{かつ} \quad q \text{は奇素数}$$

である。

すると,

$$p^q+q^p = 2^q+q^2 \quad \text{——①}$$

である。

・ $q=3$ のとき

$$① = 2^3+3^2$$
$$= 17$$

は素数となり適する。

・ $q \neq 3$ のとき

$$q \equiv 1 \quad \text{または} \quad q \equiv 2 \pmod 3$$

である。

(i) $q \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$① \equiv (-1)^q + 1^2$$
$$\equiv 0 \pmod 3$$

($\because$ q は奇数)

より, ①は3より大きい3の倍数であるから素数にならない。

(ii) $q \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$① \equiv (-1)^q + 2^2$$
$$\equiv (-1)+1$$
$$\equiv 0 \pmod 3$$

($\because$ q は奇数)

より, ①は3より大きい3の倍数であるから, 素数にならない。

以上より, 求める素数は,

$$\underline{17} \quad (p=2,\ q=3)$$

である。

3　　(35 点)

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点Ａ，Ｂ，Ｃからそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の３つの頂点がなす三角形のことをいう．

頂点Aから対面へ下ろした垂線の足をHとすると，条件よりHは△OBCの外心となり、HO=HB=HCとなる.

3つの三角形，△AHO，△AHB，△AHCにおいて.

HO=HB=HC，AH共通，

∠AHO=∠AHB=∠AHCより

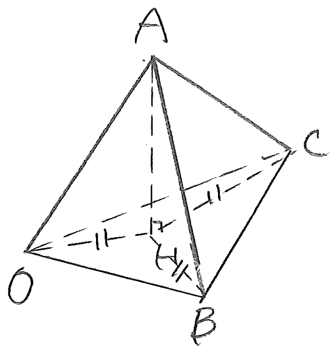
△AHO≡△AHB≡△AHCとなり，

AO=AB=ACとなる.

同様にして BO=BC=BA，CO=CA=CBを得る.

よって，四面体OABCは正四面体である.

(証明終)



$\boxed{4}$ (35点)

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y+e^{-y}}{2}-1,\ 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする．

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

図形 D を平面 $y=k$ $(0 \leqq k \leqq \log a)$ で切った切り口は,

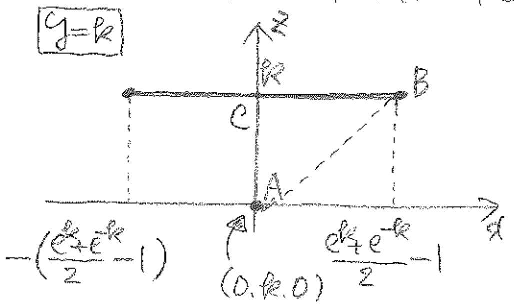
$$\begin{cases} z=k \\ |x| \leqq \dfrac{e^k+e^{-k}}{2}-1 \end{cases} \quad \text{—— } (*)$$

で表される。

$$\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1 \geqq \sqrt{e^k e^{-k}}-1 \geqq 0$$

(∵ $e^k>0$, $e^{-k}>0$ より相加・相乗平均の関係を用いた)

に注意すると, $(*)$ が表す図形は下図のようになる。



図のように,

$A(0, k, 0)$

$B\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1, 0, k\right)$

$C(0, 0, k)$

をとる。体積を求める立体を平面 $y=k$ で切った断面の面積 $S(k)$ は,

$$S(k) = \pi(AB^2 - AC^2)$$
$$= \pi BC^2$$
$$= \pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$

である。

よって, 求める体積 V は,

$$V = \int_0^{\log a} S(k)\,dk$$
$$= \int_0^{\log a} \pi\left(\frac{e^{2k}+e^{-2k}+2}{4} - (e^k+e^{-k})+1\right)dk$$
$$= \pi\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}\right)-(e^k-e^{-k}) + \frac{3}{2}k\right]_0^{\log a}$$
$$= \underline{\pi\left(\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\log a\right)}$$

である。

5

(35 点)

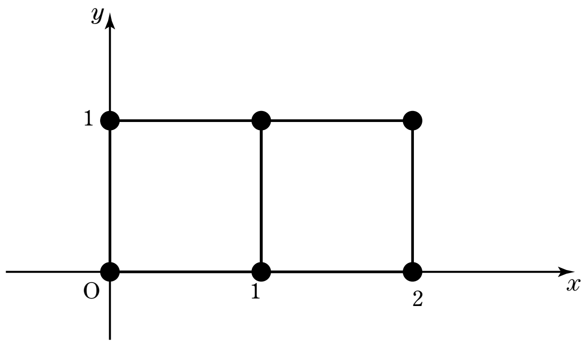
xy 平面上の 6 個の点 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1) が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．

規則：動点 X は，そのときに位置する点からでる長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が (2, 0) にいるときは，(1, 0), (2, 1) のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．

また，X が (1, 1) にいるときは，(0, 1), (1, 0), (2, 1) のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

時刻 0 で動点 X が O＝(0, 0) から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．



《解答》

n 秒後 $(n \geqq 0)$ に x 座標が 0，1，2 である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，$a_n+b_n+c_n=1$ であり

$$a_0=1,\ b_0=c_0=0$$

である．

遷移を考えて，対称性から

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n & \cdots\cdots ② \\ c_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．

①－③ より

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$$

であり，$a_0-c_0=1$ より

$$a_n-c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \iff c_n=a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ④$$

である．

ここで，② より

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=\frac{1}{2}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}b_n \\ &=\frac{1}{2}(1-b_n)+\frac{1}{3}b_n \\ &=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$b_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{7}\right),\ b_0-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}$$

であり

$$b_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \therefore\ b_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．

④，⑤ を $a_n+b_n+c_n=1$ に代入して

$$a_n+\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

である．

6　(35点)

複素数を係数とする２次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える．

（イ）　$f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

（ロ）　$f(x)$ の係数 a，b の少なくとも一方は虚数である．

この２つの条件（イ），（ロ）を同時に満たす２次式をすべて求めよ．

$f(x)=0$ の2解を α,β とすると，(イ)より，α^3,β^3 も $f(x)=0$ の2解である．

(i) $\alpha=\beta$ のとき

$\alpha^3=\alpha$ より $\alpha=0,\pm1$

よって $(\alpha,\beta)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$ となるが

これは(ロ)に反するので不適

(ii) $\alpha\neq\beta$ のとき

(I) $\begin{cases}\alpha^3=\alpha\\ \beta^3=\beta\end{cases}$ ならば，(i)と同様に $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ となり，

(ロ)に反するので不適

(II) $\begin{cases}\alpha^3=\alpha\\ \beta^3=\alpha\end{cases}$ ならば，$\alpha=0,\pm1$ となり，

$\alpha=0$ のとき，$\beta=0$ となり，不適

$\alpha=1$ のとき $\beta^3=1$ となり，$\alpha\neq\beta$ より

$\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=-1$ のとき $\beta^3=-1$ となり $\alpha\neq\beta$ より

$\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(III) $\begin{cases}\alpha^3=\beta\\ \beta^3=\alpha\end{cases}$ ならば $\alpha^9=\alpha$ となり，$\alpha=0$，

または，$\alpha^8=1$ となる．

$\alpha=0$ のとき $\beta=0$ となり不適

$\alpha^8=1$ より，$\alpha=\cos\dfrac{k\pi}{4}+i\sin\dfrac{k\pi}{4}$　$(k=0,1,2,3,4,5,6,7)$

となるが

$k=0,4$ のとき $\alpha\in\mathbb{R}$ となり $\beta=\alpha^3\in\mathbb{R}$ より不適

$k=2,6$ のとき　$\alpha=\pm i$ となり，$\beta=\mp i$（複号同順）となるので

$a=\alpha+\beta=0$，$b=\alpha\beta=1$ となり不適

よって $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{\pm1+i}{\sqrt{2}},\dfrac{\mp1+i}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{\pm1-i}{\sqrt{2}},\dfrac{\mp1-i}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）

また $\begin{cases}\alpha^3=\beta\\ \beta^3=\beta\end{cases}$ のときは，(II)と同様

以上より　$a=-(\alpha+\beta)$，$b=\alpha\beta$ に注意して

(II)より　$f(x)=x^2+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$

(III)より　$f(x)=x^2\pm\sqrt{2}i\,x-1$

（以上すべて複号同順）