京大文系数学　２０１６　解答例

$\boxed{1}$

(30 点)

xy 平面内の領域

$$x^2+y^2 \leqq 2\ ,\quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C : y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ．

《解答》

$f(x)=x^3+x^2-x$ とおくと，$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

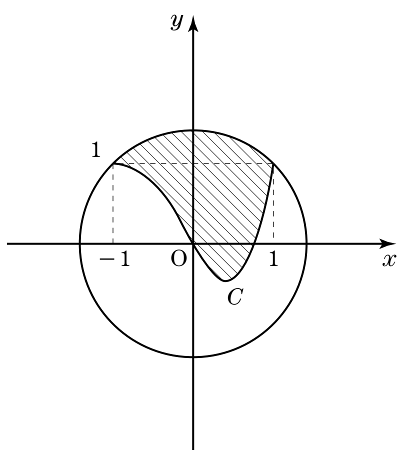
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

$|x| \leqq 1$ において，$x-1 \leqq 0$ ，$x+1 \geqq 0$ ，$x^4 \geqq 0$ ，$2(x^3+1) \geqq 0$ より

$$2-x^2-(x^3+x^2-x)^2=-(x-1)(x+1)(x^4+2x^3+2) \geqq 0$$

である．等号は $x=1$ ，-1 のときにのみ成り立つ．

ゆえに，$|x|<1$ において曲線 C は円 $x^2+y^2=2$ の内部にある．



$\mathrm{A}(-1\ ,\ 1)$ ，$\mathrm{B}(1\ ,\ 1)$ とおくと，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であり，増減表から $|x|<1$ において曲線 C は線分 AB の下部にある．

以上より，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\int_{-1}^{1}\left\{1-(x^3+x^2-x)\right\}dx\\
&=\frac{\pi}{2}-1-2\int_0^1(x^2-1)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}-1+\frac{4}{3}\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

である．

$\boxed{2}$　　(30 点)

ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36% である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90% 以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010<\log_{10}2<0.3011$ を用いてよい．

《解答》

ボタンを押したとき「はずれ」が表示される確率を p とおく．

ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」がでる事象の余事象は

20 回続けて「はずれ」が出る

であるから

$$p^{20}=1-\frac{36}{100}=\frac{64}{100}$$

が成り立つ．よって $p>0$ であるから

$$\log_{10}p^{20}=\log_{10}\frac{64}{100}\iff\log_{10}p=\frac{3\log_{10}2-1}{10}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

である．

また，ボタンを n 回（n は自然数）押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率が 90% 以上となるための条件は

n 回続けて「はずれ」が出る

という事象の余事象を考えて

$$1-p^n\geqq\frac{90}{100}\iff p^n\leqq\frac{1}{10}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

である．

① と ② から

$$n\log_{10}p\leqq-1\iff\frac{(3\log_{10}2-1)n}{10}\leqq-1\quad\cdots\cdots\text{③}$$

である．

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ より，$0.0967<1-3\log_{10}2<0.0970$ であるから ③ より

$$n\geqq\frac{10}{1-3\log_{10}2}\quad\cdots\cdots\text{④}$$

である．

$$\frac{10}{0.0970}<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<\frac{10}{0.0967}$$

かつ

$$\frac{10}{0.0970}=103.0\cdots\cdots>103$$
$$\frac{10}{0.0967}=103.4\cdots\cdots<104$$

より

$$103<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<104$$

であるから，④ を満たす最小の整数 n は 104 である．

以上より，ボタンを最低 104 回押せばよい．

3 (30点)

n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12}=1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

$n \geqq 4$ に注意して

$$2_{(n)} = 2_{(10)}$$

$$12_{(n)} = n+2_{(10)}$$

$$1331_{(n)} = n^3+3n^2+3n+1_{(10)}$$

である。

よって、n 進法表記の

$$2^{12}=1331$$

を十進法で表記すると、

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{n+2}=(n+1)^3 \quad \text{—— ①}$$

となる。

これより

$$n+1=2^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

とおけて、

$$① \Leftrightarrow 2^{2^k+1}=2^{3k}$$

$$\Leftrightarrow 2^k+1=3k \quad \text{—— ②}$$

となる。

ここで、$k \geqq 4$ のとき、

$$2^k+1-3k=(1+1)^k+1-3k$$

$$\geqq 1+{}_kC_1+{}_kC_2+{}_kC_3+1-3k$$

$$=2(1-k)+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

$$=\frac{k-1}{6}\left\{k(k+1)-12\right\}>0$$

$$(\because\ k(k+1) \geqq 4\cdot 5>12,\ k-1>0)$$

であるから、②は成立しない。

よって、$k=1, 2, 3$ で、②が成立するかを調べて

$$k=1,\ 3$$

である。

$k=1$ のとき、　$n=2^1-1=1<4$ で不適。

$k=3$ のとき　$n=2^3-1=7>4$ で適する。

以上より

$$\underline{n=7_{(10)}}$$

である。

$\boxed{4}$ (30 点)

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

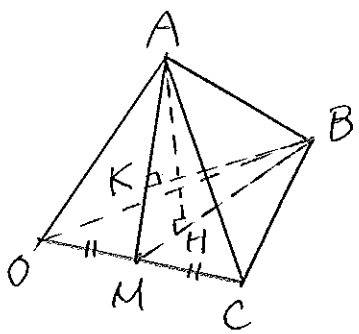
条件：頂点Ａ，Ｂ，Ｃからそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の３つの頂点がなす三角形のことをいう．

頂点Aから対面を含む平面OBCに下ろした垂線の足をHとすると、条件より、Hは△OBCの重心となる．
直線BHと辺OCの交点をMとすると．MはOCの中点となる．Bから対面に垂線BKを下ろすとKはAM上であり、$AH \perp OC$ から $BK \perp OC$
である 5点M，A，B，K，Hは同一平面上より
平面$ABM \perp OC$
となり、$AM \perp OC$ となるので，△AOCは
$AO = AC$の二等辺三角形となる．
BとCを入れかえて．$AO = AB$も得る．
以上と同様にして

$$\begin{cases} AO = AB = AC \\ BO = BC = BA \\ CO = CA = CB \end{cases}$$

となり、四面体OABCの6辺の長さはすべて等しい．
よって正四面体である．（証明終）



5

（30 点）

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える．

（イ）　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である．

（ロ）　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

この 2 つの条件（イ），（ロ）を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

《解答》

実数係数であるから，$f(x)=0$ の 3 つの解は

$$x=p\ ,\ q\pm ri\quad (p\ ,\ q\ ,\ r \text{ は実数，} r\neq 0)$$

とおくことができる．

（イ）より，$p^3=p$ であるから

$$p=0\ ,\ 1\ ,\ -1\quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

$$(q+ri)^3=q+ri\ ,\ q-ri\ ,\ p$$

であるが，$(q+ri)^3=q+ri$ は $(*)$ より $r=0$ となるので不適．

ここで，$\alpha=s+ti$ (s , t は実数，$t\neq 0$) とおくと

$$\alpha^3=\overline{\alpha}\iff (s+ti)^3=s-ti$$
$$\iff (s^3-3st^2)+(3s^2t-t^3)i=s-ti$$

であるから，実部，虚部をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} s^3-3st^2=s & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3s^2t-t^3=-t & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．$t\neq 0$ より ② は

$$3s^2-t^2=-1\iff t^2=3s^2+1\quad \cdots\cdots\cdots ③$$

となるから，① と ③ から t^2 を消去して

$$s^3-3s(3s^2+1)=s\iff 4s(2s^2+1)=0$$

$\therefore\quad s=0\ ,\ t=\pm 1$

である．

ゆえに，

$$\alpha^3=\overline{\alpha}\iff \alpha=\pm i$$

である．

<u>(i)　$p=0$ のとき</u>

$(q+ri)^3\neq 0$ より，$f(x)=0$ の 3 解は $x=0\ ,\ \pm i$ である．よって

$$f(x)=x(x^2+1)=x^3+x$$

である．

<u>(ii)　$p=1$ のとき</u>

・$(q+ri)^3=1$ となるのは，$q+ri=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のときである．異なる 3 つの解がすべて $x^3=1$ を満たすので，$f(x)=x^3-1$ である．

・$(q\pm ri)^3=q\mp ri$（複号同順）となるとき，$f(x)=0$ の解が $x=1\ ,\ \pm i$ であるから，$f(x)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$ である．

<u>(iii)　$p=-1$ のとき</u>

・$(q+ri)^3=-1$ となるのは，$q+ri=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，異なる 3 つの解がすべて $x^3=-1$ を満たすので，$f(x)=x^3+1$ である．

・$(q\pm ri)^3=q\mp ri$（複号同順）となるとき，$f(x)=0$ の解が $x=-1\ ,\ \pm i$ であるから，$f(x)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$ である．

以上から，求める 3 次式は

$$f(x)=x^3+x\ ,\ x^3-1\ ,\ x^3-x^2+x-1\ ,\ x^3+1\ ,\ x^3+x^2+x+1$$

である．