京大文系数学　２０１３　解答例

$\boxed{1}$　　（30 点）

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

《解答》

$$f(x)=(x+a)(x+2)$$

より，

$$f(f(x))>0 \iff \{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

<u>・$a=2$ のとき</u>

① の左辺は

$$\{f(x)+2\}^2=\{(x+2)^2+2\}^2$$

となり，これはつねに正の値をとるから，① はすべての実数 x で成立する．

よって，$a=2$ は適する．

<u>・$a>2$ のとき</u>

① の左辺は

$$\{(x+a)(x+2)+a\}\{(x+a)(x+2)+2\}$$

である．

$$g(x)=(x+a)(x+2)+a$$

$$h(x)=(x+a)(x+2)+2$$

とおくと，$a>2$ よりつねに $g(x)>h(x)$ であるから，求める a の範囲は，すべての実数 x で

$$h(x)>0 \iff x^2+(a+2)x+2a+2>0$$

が成立するための条件として与えられる．

（放物線 $y=h(x)$ は下に凸であるから，$h(x)\leqq 0$ となる x が存在すると $h(x)=0$ となる x が存在し，この x では ① が成立しない．）

よって，$h(x)=0$ の判別式を D として，

$$D<0 \iff (a+2)^2-4(2a+2)<0$$

$$\iff a^2-4a-4<0$$

$$\therefore\ 2<a<2+2\sqrt{2}$$

である．

以上から，求める a の範囲は

$$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$$

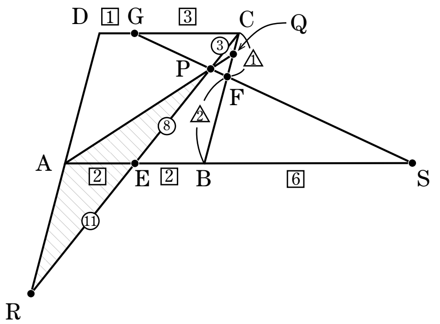
である．

$\boxed{2}$

（30 点）

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

《解答》



上の図のように，直線 AD と直線 CE の交点を R，直線 GF と直線 AB の交点を S とする．

$\mathrm{DG}=a\ (a>0)$ とおくと，

$$\mathrm{CG}=3a,\ \mathrm{AE}=\mathrm{BE}=2a$$

であり，$\triangle\mathrm{CGF}\backsim\triangle\mathrm{BSF}$ であるから

$$\mathrm{CG}:\mathrm{BS}=\mathrm{CF}:\mathrm{BF}=1:2$$

より，

$$\mathrm{BS}=6a$$

である．すると，$\triangle\mathrm{CGP}\backsim\triangle\mathrm{ESP}$ であるから

$$\mathrm{CP}:\mathrm{EP}=\mathrm{CG}:\mathrm{ES}=3:8$$

であり，

$$\mathrm{CP}=3b,\ \mathrm{PE}=8b\ (b>0)$$

とおくことができる．さらに，$\triangle\mathrm{CBE}\backsim\triangle\mathrm{RAE}$ であるから

$$\mathrm{CE}:\mathrm{RE}=\mathrm{BE}:\mathrm{AE}=1:1$$

であり，

$$\mathrm{RE}=\mathrm{CE}=11b$$

である．

最後に，$\triangle\mathrm{ARP}\backsim\triangle\mathrm{QCP}$ であるから

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=\mathrm{RP}:\mathrm{CP}=(11b+8b):3b=19:3$$

である．

《別解》

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$$

とおく．点 P は直線 CE 上かつ直線 FG 上であるから，実数 s，t を用いて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+s\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{s+1}{2}\vec{a}+s\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+t\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{3t+1}{4}\vec{a}+\dfrac{3-t}{3}\vec{b}\end{cases}$$

と表すことができ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でなく，どちらも $\vec{0}$ ではないので，この 2 つの表し方は一致する．

よって，

$$\begin{cases}\dfrac{s+1}{2}=\dfrac{3t+1}{4}\\ s=\dfrac{3-t}{3}\end{cases}\iff s=\frac{8}{11},\ t=\frac{9}{11}$$

となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}$$

である．

次に，点 Q は直線 AP 上かつ辺 BC 上であるから，実数 k，l を用いて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{19}{22}k\vec{a}+\dfrac{8}{11}k\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+l\vec{b}\end{cases}$$

と表すことができ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でなく，どちらも $\vec{0}$ ではないので，この 2 つの表し方は一致する．

よって，

$$\begin{cases}\dfrac{19}{22}k=1\\ \dfrac{8}{11}k=l\end{cases}\iff k=\frac{22}{19},\ l=\frac{16}{19}$$

となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{22}{19}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

であり，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=19:3$$

である．

$\boxed{3}$ （30 点）

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1)　a と b は整数であることを示せ．

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

《解答》

(1)　x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $Q(x)$ とおくと，余りが $ax+b$ より

$$x^n=(x-k)(x-k-1)Q(x)+ax+b$$

である．この式に $x=k$, $k+1$ を代入して，

$$\begin{cases} k^n=ak+b \\ (k+1)^n=a(k+1)+b \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つので，これらを解いて，

$$\begin{cases} a=(k+1)^n-k^n \\ b=k(k+1)\left\{k^{n-1}-(k+1)^{n-1}\right\} \end{cases}$$

である．k , n は自然数であるから，a , b はともに整数である．

(2)　背理法で示す．

a , b をともに割り切る素数 p が存在すると仮定すると，$(*)$ より

$$k^n,\ (k+1)^n$$

はともに p の倍数であるから，p は k と $k+1$ をともに割り切る．ところが，これでは p が

$$(k+1)-k=1$$

を割り切ることになり，矛盾である．

よって，a と b をともに割り切る素数は存在しない．

4　　　　（30 点）

α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0\,,\,3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3}\,,\,0\right)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　α，β の値を求めよ．

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

《解答》

(1)　円 C は中心が $\mathrm{A}(0\,,\,3)$ で点 P を通るから，その半径は

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\left(0-\sqrt{3}\right)^2+(3-0)^2}=2\sqrt{3}$$

である．よって，円 C の方程式は

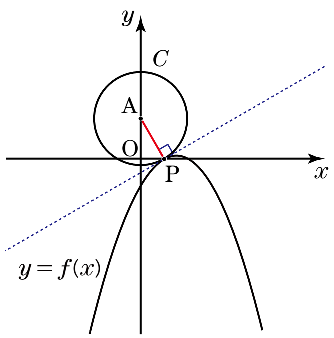
$$x^2+(y-3)^2=12$$

である．

円 C の点 P における接線の方程式は

$$\sqrt{3}x+(0-3)(y-3)=12 \iff y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$$

である．



ここで，

$$f(x)=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

とおくと，

$$f'(x)=-\frac{2}{3}x+\alpha$$

である．

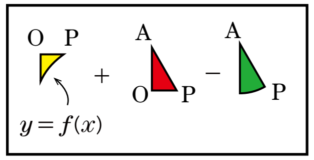
よって，与えられた条件より

$$\begin{cases} f\left(\sqrt{3}\right)=0 \\ f'\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} -1+\sqrt{3}\alpha-\beta=0 \\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=\sqrt{3} \\ \beta=2 \end{cases}$$

である．

(2)　求める面積は



$$\int_0^{\sqrt{3}}\left\{0-\left(-\frac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2\right)\right\}dx+\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\pi$$

$$=\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$$

である．

$\boxed{5}$ （30 点）

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1)　石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2)　石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ．

《解答》

(1)　石が座標 x の点にあるとき，1 回硬貨を投げたら石は次のように移動する．

表が出た場合：$x \to -x$

裏が出た場合：$x \to 2-x$

よって，2 回硬貨を投げたら石は次のように移動する．

①（表，表）が出た場合：$x \to -x \to -(-x)=x$

②（表，裏）が出た場合：$x \to -x \to 2-(-x)=x+2$

③（裏，表）が出た場合：$x \to 2-x \to -(2-x)=x-2$

④（裏，裏）が出た場合：$x \to 2-x \to 2-(2-x)=x$

ここで，

$x+2 \neq x$，$x-2 \neq x$

であるから，2 回硬貨を投げて石が座標 x の点にあるのは，① または ④ の場合である．ゆえに，求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

である．

(2)　$2n$ 回硬貨を投げるとき，石が座標 $2n$ の点にあるのは，

② が n 回

の場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である．