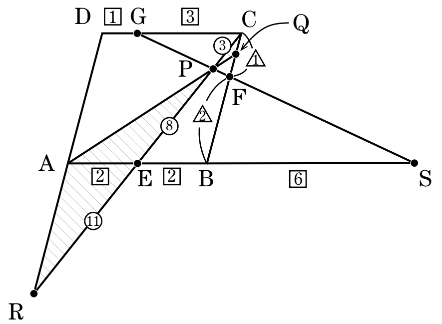
1

（30 点）

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

《解答》



上の図のように，直線 AD と直線 CE の交点を R，直線 GF と直線 AB の交点を S とする．

DG $= a$ $(a>0)$ とおくと，

CG $= 3a$，AE $=$ BE $= 2a$

であり，△CGF ∽ △BSF であるから

CG : BS $=$ CF : BF $= 1:2$

より，

BS $= 6a$

である．すると，△CGP ∽ △ESP であるから

CP : EP $=$ CG : ES $= 3:8$

であり，

CP $= 3b$，PE $= 8b$ $(b>0)$

とおくことができる．さらに，△CBE ∽ △RAE であるから

CE : RE $=$ BE : AE $= 1:1$

であり，

RE $=$ CE $= 11b$

である．

最後に，△ARP ∽ △QCP であるから

AP : PQ $=$ RP : CP $= (11b+8b):3b = 19:3$

である．

《別解》

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$$

とおく．点 P は直線 CE 上かつ直線 FG 上であるから，実数 s，t を用いて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+s\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{s+1}{2}\vec{a}+s\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+t\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{3t+1}{4}\vec{a}+\dfrac{3-t}{3}\vec{b}\end{cases}$$

と表すことができ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でなく，どちらも $\vec{0}$ ではないので，この 2 つの表し方は一致する．

よって，

$$\begin{cases}\dfrac{s+1}{2}=\dfrac{3t+1}{4}\\ s=\dfrac{3-t}{3}\end{cases}\iff s=\frac{8}{11},\ t=\frac{9}{11}$$

となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}$$

である．

次に，点 Q は直線 AP 上かつ辺 BC 上であるから，実数 k，l を用いて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{19}{22}k\vec{a}+\dfrac{8}{11}k\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+l\vec{b}\end{cases}$$

と表すことができ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でなく，どちらも $\vec{0}$ ではないので，この 2 つの表し方は一致する．

よって，

$$\begin{cases}\dfrac{19}{22}k=1\\ \dfrac{8}{11}k=l\end{cases}\iff k=\frac{22}{19},\ l=\frac{16}{19}$$

となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{22}{19}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

であり，

AP : PQ $= 19:3$

である．

$\boxed{2}$ （35 点）

　N を 2 以上の自然数とし，a_n ($n=1$，2，……) を次の性質 (i)，(ii) をみたす数列とする．

(i)　$a_1=2^N-3$，

(ii)　$n=1$，2，……に対して，

$$a_n \text{ が偶数のとき } a_{n+1}=\frac{a_n}{2}\ ,\ a_n \text{ が奇数のとき } a_{n+1}=\frac{a_n-1}{2}\ .$$

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1}-N-5$$

が成り立つことを示せ．

《解答》

　まず，

$$a_1=2^N-3 \quad \text{（奇数）}$$

$$a_2=\frac{a_1-1}{2}=2^{N-1}-2 \quad (N\geqq 2 \text{ より偶数})$$

$$a_3=\frac{a_2}{2}=2^{N-2}-1 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

　$N=2$ のとき

$$a_3=0$$

であり，以降帰納的に

$$a_n=0 \quad (n\geqq 3)$$

である．

　以下，$N\geqq 3$ のとき

$$a_n=\begin{cases} 2^{N+1-n}-1 & (3\leqq n\leqq N) \\ 0 & (n\geqq N+1) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(A)$$

であることを数学的帰納法で示す．

<u>(I)　$n=3$ のとき</u>

　$(*)$ より (A) は成立する．

<u>(II)　$n=l$（l は 3 以上のある自然数）のとき</u>

　(A) が成立すると仮定する．

　$3\leqq l\leqq N$ のとき，仮定は

$$a_l=2^{N+1-l}-1$$

であり，$N+1-l\geqq 1$ よりこれは奇数で，

$$a_{l+1}=\frac{a_l-1}{2}=2^{N+1-(l+1)}-1$$

となるので，$n=l+1$ のときも成立する．（$l=N$ のときもこれでよい）

　また，$l\geqq N+1$ のとき，仮定は

$$a_l=0 \quad \text{（偶数）}$$

であり，

$$a_{l+1}=\frac{a_l}{2}=0$$

であるから，$n=l+1$ のときも成立する．

　(I)，(II) より，(A) が成立することが示された．

　以上から，$a_n\geqq 0$ ($n=1$，2，3，……) であり，$a_n=0$ ($n\geqq N+1$) であるから，どのような自然数 M に対しても

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M} a_n &\leqq \sum_{n=1}^{N} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{N}(2^{N+1-n}-1)\underline{\underline{-3}} \quad \left(\because\ a_1=2^N-1\underline{\underline{-2}},\ a_2=2^{N-1}-1\underline{\underline{-1}}\right) \\ &= \frac{2^N\left(1-\frac{1}{2^N}\right)}{1-\frac{1}{2}}-N-3 \\ &= 2^{N+1}-N-5\end{aligned}$$

が成り立つ．

3

（35 点）

n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

《解答》

$$x^2-2x-1=0 \iff x=1\pm\sqrt{2}$$

である．

$$\alpha=1-\sqrt{2}\,,\ \beta=1+\sqrt{2}$$

とおくと，

$$\alpha+\beta=2\,,\ \alpha\beta=-1$$

である．

x^n を x^2-2x-1 で割った商を $Q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とおくと，

$$x^n=(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

であり，$x=\alpha$，β として

$$\begin{cases}\alpha^n=a_n\alpha+b_n\\ \beta^n=a_n\beta+b_n\end{cases}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha} \quad\cdots\cdots①$$

$$b_n=\frac{-\alpha\beta(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha} \quad\cdots\cdots②$$

である．

＜a_n，b_n が整数であることの証明＞

$$\alpha^2=2\alpha+1\,,\ \beta^2=2\beta+1$$

より

$$\alpha^{n+2}=2\alpha^{n+1}+\alpha^n \quad\cdots\cdots③$$

$$\beta^{n+2}=2\beta^{n+1}+\beta^n \quad\cdots\cdots④$$

であるから，④－③ を $\beta-\alpha$ で割ることで

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n \quad\cdots\cdots⑤$$

が成立する．

以下，a_n が整数であることを数学的帰納法で示す．

<u>(I)　$n=1$，2 のとき</u>

計算すると，$a_1=1$，$a_2=2$ であるから，$n=1$，2 のときは成立する．

<u>(II)　$n=k$，$k+1$（k はある自然数）のとき</u>

a_k，a_{k+1} が整数だと仮定すると，⑤ より a_{k+2} も整数である．

(I)，(II) より，a_n はすべての自然数 n で整数である．

また，b_n について，$b_1=0$ は整数であり，①，② を用いると $n\geqq 2$ のとき

$$b_n=a_{n-1}$$

であるから，これも整数である．

＜a_n と b_n をともに割り切る素数が存在しないことの証明＞

$n=1$ のとき，$a_1=1$，$b_1=0$

$n=2$ のとき，$a_2=2$，$b_2=1$

であるから，a_1 と b_1，a_2 と b_2 をともに割り切る素数は存在しない．

$n\geqq 3$ のとき，$b_n=a_{n-1}$ であるから，a_n と a_{n-1} をともに割り切る素数が存在しないことを示せばよい．これを背理法で示す．

a_n と a_{n-1} をともに割り切る素数 p が存在すると仮定すると，⑤ より

$$a_{n-2}=a_n-2a_{n-1}$$

であるから，p は a_{n-2} も割り切る．これを繰り返すと p は a_1 を割り切ることになるが，$a_1=1$ よりこれは不合理．

よって，題意は示された．

4　　（35 点）

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi>3.1$ および $\sqrt{3}>1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

《解答》

$$f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

とおくと，

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{\sqrt{3}}{4}(-x)^2=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=f(x)$$

であるから，$f(x)$ は偶関数である．ゆえに，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で考えれば十分．

$$f'(x)=-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ f''(x)=-\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，$f'(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(x)$ は連続関数であり，

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)<f'(0)=0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}-1>\frac{1.7\times3.1-4}{4}=\frac{1.27}{4}>0$$

であるから，中間値の定理と増減表より，$f'(x)=0$ となる x が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在する．それを α とすると，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで

$$f(0)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{16}>\frac{1.7\times(3.1)^2}{16}=\frac{16.337}{16}>1$$

であるから，対称性に注意すると，$f(x)$ は $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$ をとる．

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（30 点）

xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y = \sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

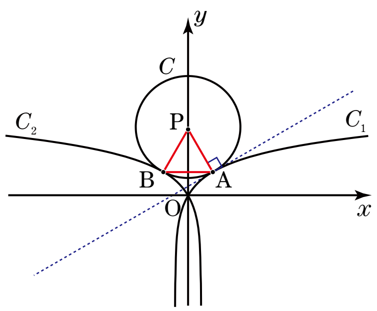
（補足）　ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

《解答》

$C_1 : y = f(x)$ とおくと，$C_2 : y = f(-x)$ であるから，C_1 と C_2 は y 軸に関して対称である．

△PAB が正三角形で，A と B が y 軸に関して対称であるから直線 PA の傾きは $-\sqrt{3}$ である．ゆえに，C_1 の点 A における接線の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{1+x}$$



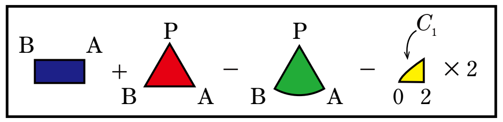
であるから，

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = 2$$

となる．これは真数条件 $x > -1$ を満たす．

ゆえに $\mathrm{A}\left(2,\ \sqrt{3}\log 3\right)$ である．

以上から，求める面積は，



$$4\cdot\sqrt{3}\log 3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{3} - 2\int_0^2 \sqrt{3}\log(1+x)\,dx$$

$$= 4\sqrt{3}\log 3 + 4\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x) - x\Big]_0^2$$

$$= 4\sqrt{3}\log 3 + 4\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\left(3\log 3 - 2\right)$$

$$= 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\log 3 - \frac{8}{3}\pi$$

である．

$\boxed{6}$ （35 点）

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1)　石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2)　石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

《解答》

(1)　石が座標 x の点にあるとき，1 回硬貨を投げたら石は次のように移動する．

表が出た場合：$x \to -x$

裏が出た場合：$x \to 2-x$

よって，2 回硬貨を投げたら石は次のように移動する．

①（表，表）が出た場合：$x \to -x \to -(-x)=x$

②（表，裏）が出た場合：$x \to -x \to 2-(-x)=x+2$

③（裏，表）が出た場合：$x \to 2-x \to -(2-x)=x-2$

④（裏，裏）が出た場合：$x \to 2-x \to 2-(2-x)=x$

ここで，

$x+2 \neq x$，$x-2 \neq x$

であるから，2 回硬貨を投げて石が座標 x の点にあるのは，① または ④ の場合である．ゆえに，求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

である．

(2)　$2n$ 回硬貨を投げるとき，石が座標 $2n-2$ の点にあるのは，

(① または ④) が 1 回，② が $n-1$ 回

の場合であるから，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{2^{2n-1}}$$

である．