京大文系数学　２０１７　解答例

$\boxed{1}$ （30 点）

曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3\,,\,0)$ を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

《解答》

$f(x)=x^3-4x+1$ とおくと，$f'(x)=3x^2-4$ である．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t\,,\,t^3-4t+1)$ における接線 l の方程式は

$$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t+1$$

$$\therefore\quad y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \quad \cdots\cdots ①$$

である．l の傾きが負であることから

$$3t^2-4<0 \qquad \therefore\quad -\frac{2\sqrt{3}}{3}<t<\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

l が $(3\,,\,0)$ を通るから，① に代入して整理すると

$$2t^3-9t^2+11=0$$

$$(t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

$$\therefore\quad t=-1\,,\ \frac{11\pm\sqrt{33}}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

である．ここで，$1.8^2=3.24>3$ より $1.8>\sqrt{3}$ であり，$36>33$ より $6>\sqrt{33}$ であるから

$$\frac{11-\sqrt{33}}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{33-3\sqrt{33}-8\sqrt{3}}{12}>\frac{33-3\cdot6-8\cdot1.8}{12}=\frac{0.6}{12}>0$$

である．よって

$$\frac{11+\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{33}}{4}>\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であるから，③ のうち ② を満たすのは $t=-1$ のみである．

したがって，l の方程式は

$$y=-x+3$$

である．$g(x)=-x+3$ とおく．

$$f(x)-g(x)=(x-2)(x+1)^2$$

であるから，C と l の共有点の x 座標は $x=2\,,\,-1$ である．

また，$-1<x<2$ において $f(x)-g(x)<0$ より，$f(x)<g(x)$ である．

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{-1}^{2}-(x-2)(x+1)^2\,dx\\&=\int_{-1}^{2}\left\{-(x+1)^3+3(x+1)^2\right\}dx\\&=\left[-\frac{1}{4}(x+1)^4+(x+1)^3\right]_{-1}^{2}\\&=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$（答）

である．

2

(30 点)

次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

《解答》

(1)　n を 0 以上の整数として

$$2^n < 10^{100} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす n の個数を考える．

① の両辺は正なので底 10 の対数をとると

$$n\log_{10} 2 < 100$$

$$n < \frac{100}{\log_{10} 2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010}$$

である．

$$\frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots\cdots\cdots, \quad \frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots\cdots\cdots$$

であるから，② を満たす 0 以上の整数 n は

$$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, 332$$

の

333 個　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots\cdots$ (答)

である．

(2)　まず

$$5^m < 10^{100}$$

を満たす自然数 m の個数を考える．両辺正より底 10 の対数をとると

$$m\log_{10} 5 < 100$$

$$m < \frac{100}{\log_{10} 5} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$ より，$0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$ であるから

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10} 5} < \frac{100}{0.6989}$$

である．

$$\frac{100}{0.6989} = 143.08\cdots\cdots\cdots, \quad \frac{100}{0.6990} = 143.06\cdots\cdots\cdots$$

であるから，③ を満たす自然数 m は

$$m = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, 143$$

の 143 個である．　$\cdots\cdots\cdots$ ④

ここで，A，B を 0 以上の整数として

$$10^{99} \leqq 2^A \cdot 5^B < 10^{100} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

を満たすような (A, B) の組の個数を考える．

(i)　$A = B$ のとき

$A = B = 99$ の 1 個のみである．

(ii)　$A > B$ のとき

$B \geqq 100$ のとき，$A \geqq 101$ となり，$2^A \cdot 5^B > 10^{100}$ となり不適である．

$B = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, 99$ のとき，⑤ の各辺を 10^B で割ると

$$10^{99-B} \leqq 2^{A-B} < 10^{100-B}$$

となる．B を 0 から 99 まで動かして考えれば，これを満たす (A, B) の組の個数は (1) で求めたもののうち，2^0 を除いた 332 個である．

(iii)　$A < B$ のとき

$A \geqq 100$ のとき，$B \geqq 101$ となり，$2^A \cdot 5^B > 10^{100}$ となり不適である．

$A = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, 99$ のとき，⑤ の各辺を 10^A で割ると

$$10^{99-A} \leqq 5^{B-A} < 10^{100-A}$$

となる．A を 0 から 99 まで動かして考えれば，これを満たす (A, B) の組の個数は ④ で求めた 143 個である．

以上，(i)，(ii)，(iii) から，求める個数は

$1 + 332 + 143 = 476$ （個）　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots\cdots$ (答)

である．

$\boxed{3}$　　(30点)

座標空間において原点Oと点A(0，−1，1)を通る直線を l とし，点B(0，2，1)と点C(−2，2，−3)を通る直線を m とする．l 上の2点P，Qと，m 上の点Rを△PQRが正三角形となるようにとる．このとき，△PQRの面積が最小となるようなP，Q，Rの座標を求めよ．

《解答》

△PQRが正三角形であるから，Rから l に下ろした垂線の足Mは，辺PQの中点になる．また，RM $=a$ (>0) とおくと，△PQRの1辺の長さは

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

であり，△PQRの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

である．よって，△PQRの面積が最小となるのは，a が最小のときである．

l 上の動点S，m 上の動点Tに対して，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\-s\\s\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}-2t\\2\\-4t+1\end{pmatrix}$$

と表せる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より l と m は平行でなく，S＝Tとなる s，t は存在しないから，l と m は交わらない．よって，l と m はねじれの位置にある．

したがって，STが最小になるのは

$\mathrm{ST}\perp l$ かつ $\mathrm{ST}\perp m$

のときである．

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\\overrightarrow{\mathrm{ST}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{cases}$$

となるのは

$$\begin{cases}-2s-4t-1=0\\-2s-10t+2=0\end{cases}\quad\therefore\ s=-\frac{3}{2},\ t=\frac{1}{2}$$

のときであるから，このときのS，Tは

$$\mathrm{S}\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right),\ \mathrm{T}(-1,\ 2,\ -1)$$

である．よって

$$\mathrm{M}\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right),\ \mathrm{R}(-1,\ 2,\ -1)$$

のとき，a は最小となり，△PQRの面積が最小となる．

このとき

$$a=\left|\overrightarrow{\mathrm{RM}}\right|=\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

であるから，求める点の座標は

P(0，1，−1)，Q(0，2，−2)，R(−1，2，−1)　………（答）

または

P(0，2，−2)，Q(0，1，−1)，R(−1，2，−1)　………（答）

である．

$\boxed{4}$ (30 点)

p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p},\ \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　次の条件

(A)　　$\tan(\alpha+2\beta)=2$

を満たす p，q の組 $(p,\,q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ．

(2)　条件 (A) を満たす p，q の組 $(p,\,q)$ で，$q>3$ であるものは存在しないことを示せ．

《解答》

(1)　$q=1$ のとき，$\tan\beta=1$ より，$\beta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$（$n$ は整数）である．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

であるから，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ より，$p=-2$ となる．p は自然数であるから，これは不適．

$q \geqq 2$ のとき

$$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2q}{q^2-1}$$

であり

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{2q}{q^2-1}}{1-\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{2q}{q^2-1}}=\frac{q^2-1+2pq}{pq^2-p-2q}$$

である．よって，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ より

$$\frac{q^2-1+2pq}{pq^2-p-2q}=2$$

であり，これを整理して

$$2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

である．$q \geqq 2$ より

$$q^2-q-1=(q-2)(q+1)+1>0$$

であるから

$$p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

$q=2$ とすると，① より，$p=\dfrac{11}{2}$ であるから不適である．

$q=3$ とすると，① より，$p=2$ で適する．

以上から

$(p,\,q)=(2,\,3)$ ……… (答)

である．

(2)　q が 4 以上の偶数のとき，① の分子は奇数，分母は偶数となり，p は整数でない．

$q=5$ とすると，① より，$p=\dfrac{22}{19}$ であるから不適である．

q が 7 以上の奇数のとき

$$2(q^2-q-1)-(q^2+4q-1)=q^2-6q-1=(q-7)(q+1)+6>0$$

であるから，$0<$（① の分子）$<$（① の分母）となり，p は整数でない．

以上から，(A) を満たす p，q の組 $(p,\,q)$ で，$q>3$ となるものは存在しない．

■

5

（30 点）

n を 2 以上の自然数とする．さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする．

(1)　$X=1$ である確率を求めよ．

(2)　$X=5$ である確率を求めよ．

《解答》

(1)　$X=1$ となるのは

$$(M,\ L)=(6,\ 5),\ (5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$$

のときである．

$(M,\ L)=(6,\ 5)$ となるのは，n 回振るときに 5 か 6 しか出ない場合のうち，すべて 6 やすべて 5 の場合を除いた場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である．

$(M,\ L)=(5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$ のときも同様であるから，求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．

(2)　$X=5$ となるのは，$(M,\ L)=(6,\ 1)$ のときである．この余事象は，$M\leqq 5$ または $L\geqq 2$ となる事象である．

n 回振るときに 1 から 5 のみ出る場合と，2 から 6 のみ出る場合から，重複している 2 から 5 のみ出る場合を除いて考えると，求める確率は

$$1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．