1

(30 点)

w を 0 でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする．

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

《解答》

(1)　$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

より

$$w+\frac{1}{w}=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

であるから

$$\begin{cases} x=\left(R+\dfrac{1}{R}\right)\cos\theta \\ y=\left(R-\dfrac{1}{R}\right)\sin\theta \end{cases}$$

である．$R+\dfrac{1}{R}>0$，$R-\dfrac{1}{R}>0$ より

$$\cos\theta=\frac{x}{R+\dfrac{1}{R}},\quad \sin\theta=\frac{y}{R-\dfrac{1}{R}}$$

である．$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，求める軌跡は楕円

$$\frac{x^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

の全体である．

(2)　$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$　$(r>0)$ とおく．

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{r}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=\frac{1}{r}(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

より

$$\begin{cases} x=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ y=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha \end{cases}$$

である．$\cos\alpha\neq 0$，$\sin\alpha\neq 0$ より

$$\begin{cases} r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha} & \cdots\cdots\cdots ① \\ r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，② から

$$\begin{cases} r=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right) & \cdots\cdots\cdots ③ \\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right) & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

であり，① かつ ② は ③ かつ ④ と同値である．③，④ から

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}\right)=1$$

である．また，③ を $r>0$ に代入して

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)>0$$

である．

よって，求める軌跡は，双曲線の一部

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=4 \qquad (x\geqq 2\cos\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．

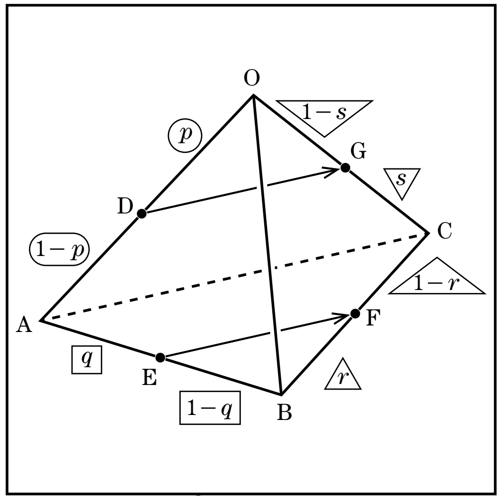
2　　(30 点)

四面体 OABC を考える．点 D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば AE : EB = CF : FB であることを示せ．

(2)　D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

《解答》



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=p:1-p$，$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=q:1-q$，

$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=r:1-r$，$\mathrm{CG}:\mathrm{GO}=s:1-s$

$(0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1,\ 0<s<1)$

とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-q)\vec{a}+q\vec{b}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-s)\vec{c}$

より

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-p\vec{a}+(1-s)\vec{c}$，

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-(1-q)\vec{a}+(1-r-q)\vec{b}+r\vec{c}$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ のとき，0 でない実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$$

と表せるから

$$-(1-q)\vec{a}+(1-r-q)\vec{b}+r\vec{c}=-kp\vec{a}+k(1-s)\vec{c}$$

である．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は一次独立より

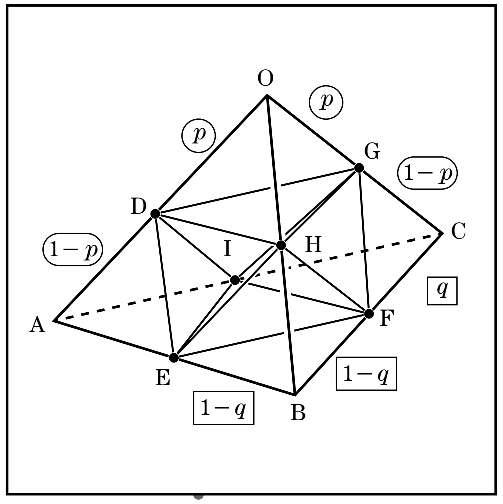
$$\begin{cases}-(1-q)=-kp\\ 1-r-q=0\\ r=k(1-s)\end{cases}$$

であるから

$$r=1-q,\ s=1-p,\ k=\frac{1-q}{p}$$

である．よって，AE : EB = CF : FB である．

■



(2)　D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，D，E，H が正方形の 3 頂点になることはない．

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{IF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ であるから，(1) と同様にして

$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=\mathrm{OH}:\mathrm{HB}$　　$\therefore$　$\mathrm{OH}:\mathrm{HB}=p:1-p$

$\mathrm{BE}:\mathrm{EA}=\mathrm{BH}:\mathrm{HO}$　　$\therefore$　$\mathrm{OH}:\mathrm{HB}=q:1-q$

である．よって

$p=q$　………①

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ であるから，同様にして

$1-p=q$　………②

である．

①，② より，$p=q=\dfrac{1}{2}$ であるから，D，E，H はそれぞれ辺の中点である．

中点連結定理から

OA = 2EH，OB = 2DE，AB = 2DH

である．また，正八面体の各辺の長さは等しいので

EH = DE = DH

である．よって

OA = OB = AB

であるから，△OAB は正三角形である．

F，G，I も同様に各辺の中点であり，△OBC，△OCA，△ABC が正三角形であるから，OABC は正四面体である．

■

$\boxed{3}$ (35 点)

p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\ \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

《解答》

$q=1$ のとき，$\tan\beta=1$ より，$\beta=\frac{\pi}{4}+n\pi$（n は整数）である．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

であるから，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ より，$p=-2$ となる．p は自然数であるから，これは不適．

$q\geqq 2$ のとき

$$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2q}{q^2-1}$$

であり

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}}{1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}}=\frac{q^2-1+2pq}{pq^2-p-2q}$$

である．よって，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ より

$$\frac{q^2-1+2pq}{pq^2-p-2q}=2$$

であり，これを整理して

$$2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

である．$q\geqq 2$ より

$$q^2-q-1=(q-2)(q+1)+1>0$$

であるから

$$p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

である．

$q=2$ とすると，① より，$p=\frac{11}{2}$ であるから不適である．

$q=3$ とすると，① より，$p=2$ で適する．

q が 4 以上の偶数のとき，① の分子は奇数，分母は偶数となり，p は整数でないから，不適である．

$q=5$ とすると，① より，$p=\frac{22}{19}$ であるから不適である．

q が 7 以上の奇数のとき

$$2(q^2-q-1)-(q^2+4q-1)=q^2-6q-1=(q-7)(q+1)+6>0$$

であるから，$0<$（① の分子）$<$（① の分母）となり，p は整数でなく，不適である．

以上から

$(p,\ q)=(2,\ 3)$ ………（答）

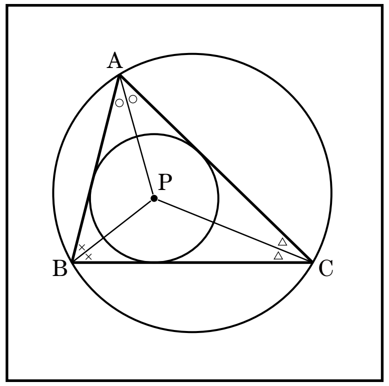
である．

$\boxed{4}$ （35 点）

$\triangle$ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また $\triangle$ABC の外接円の半径は 1 であるとする．

(1)　$\triangle$ABC の内心を P とするとき，$\angle$BPC を求めよ．

(2)　$\triangle$ABC の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．



(1)　点 P は内心より，内角の二等分線の交点である．よって

$$\angle \mathrm{ABP}=\angle \mathrm{PBC}，\ \angle \mathrm{ACP}=\angle \mathrm{PCB}$$

であるから

$$\angle \mathrm{ABC}=2\angle \mathrm{PBC}，\ \angle \mathrm{ACB}=2\angle \mathrm{PCB}$$

である．

$$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}=\pi-\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$$

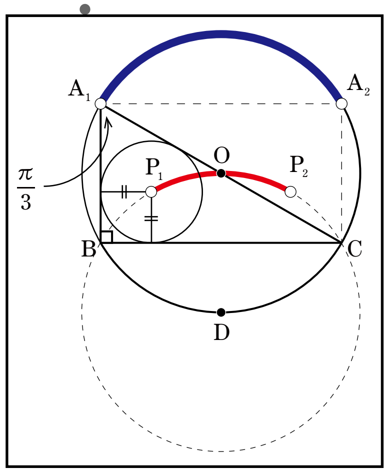
であるから

$$2\left(\angle \mathrm{PBC}+\angle \mathrm{PCB}\right)=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore\ \angle \mathrm{PBC}+\angle \mathrm{PCB}=\frac{\pi}{3}$$

よって

$$\angle \mathrm{BPC}=\pi-(\angle \mathrm{PBC}+\angle \mathrm{PCB})=\frac{2}{3}\pi$$ ………（答）

である．



(2)　外接円の中心を O とし，$\angle$ABC，$\angle$ACB が直角となる A をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ とすると，点 A は劣弧 $\mathrm{A_1A_2}$ 上を動く．ただし，端点は除く．

　$\mathrm{A}=\mathrm{A_1}$ のときの P を $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{A}=\mathrm{A_2}$ のときの P を $\mathrm{P_2}$ とし，直線 BC に関する点 O の対称点 D をとると，(1) と円周角の定理の逆より，P は D を中心とする半径 1 の円の劣弧 $\mathrm{P_1P_2}$ 上を動く．ただし，端点は除く．

　$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$ のときの r は，$\triangle \mathrm{A_1BC}$ の面積を 2 通りで表すことにより

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(1+2+\sqrt{3}\right)r \qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

である．

　$\triangle$ABC が正三角形のとき，P＝O で，このとき $r=\dfrac{1}{2}$ である．

　r は点 P と辺 BC の距離として与えられるから，求める範囲は

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\frac{1}{2}$$ ………（答）

である．

$\boxed{5}$ （35 点）

$a \geqq 0$ とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．
（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち２つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．）

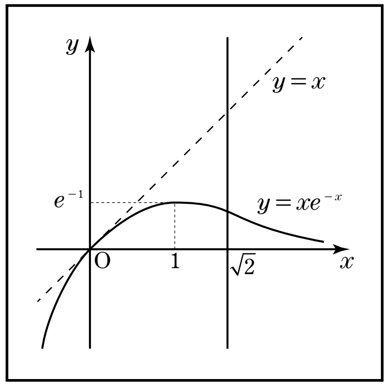
《解答》

$f(x) = xe^{-x}$ とおく．

$$f'(x) = (1-x)e^{-x},\quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

より，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ における増減表は次の通り．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



$y = f(x)$ 上の点 $(0\,,\,0)$ における接線が $y = x$ であることに注意する．

$$f(x) - ax = x(e^{-x} - a)$$

である．

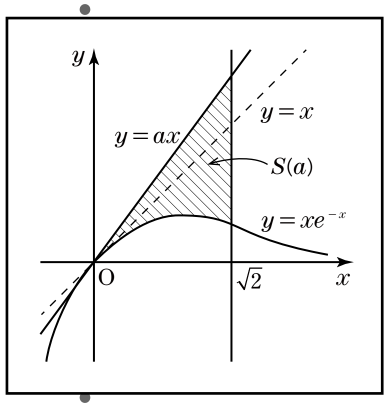
(i)　$a \geqq 1$ のとき

$0 < x < \sqrt{2}$ において

$$f(x) - ax < 0$$

より，直線 $y = ax$ は曲線 $y = f(x)$ の上側にあるから，$S(a)$ は単調に増加する．

よって，$S(a) \geqq S(1)$ である．



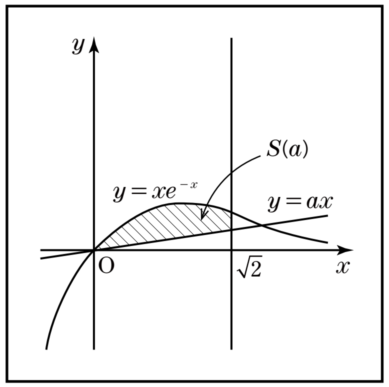
(ii)　$0 \leqq a \leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき

$0 < x < \sqrt{2}$ において

$$f(x) - ax > 0$$

より，直線 $y = ax$ は曲線 $y = f(x)$ の下側にあるから，$S(a)$ は単調に減少する．

よって，$S(a) \geqq S\left(e^{-\sqrt{2}}\right)$ である．



(iii)　$e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ のとき

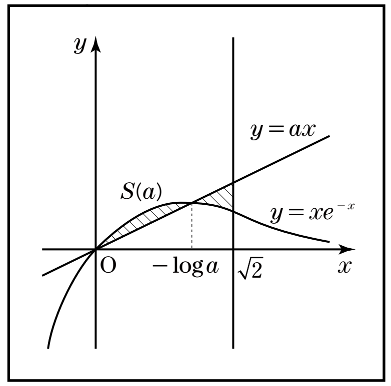
$f(x) - ax = 0$ としたら，$x = 0\,,\,-\log a$ である．

$\alpha = -\log a$ とおくと

$0 < x < \alpha$ において，$f(x) - ax > 0$

$\alpha < x < \sqrt{2}$ において，$f(x) - ax < 0$

である．



よって

$$S(a) = \int_0^{\alpha}\{f(x) - ax\}dx + \int_{\alpha}^{\sqrt{2}}\{ax - f(x)\}dx$$
$$= \int_0^{\alpha} xe^{-x}\,dx - a\int_0^{\alpha} x\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\alpha} xe^{-x}\,dx - a\int_{\sqrt{2}}^{\alpha} x\,dx$$

である．

$$S'(a) = \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{da} - \int_0^{\alpha} x\,dx - a \cdot \alpha \cdot \frac{d\alpha}{da}$$
$$+ \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{da} - \int_{\sqrt{2}}^{\alpha} x\,dx - a \cdot \alpha \cdot \frac{d\alpha}{da}$$
$$= \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} x\,dx - \int_0^{\alpha} x\,dx \qquad (\because\ \ e^{-\alpha} = a)$$
$$= 1 - \alpha^2$$
$$= (1 + \log a)(1 - \log a)$$

であるから，$S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

よって，$S\left(e^{-\sqrt{2}}\right) > S(e^{-1})$，$S(1) > S(e^{-1})$ である．

以上，(i)，(ii)，(iii) より，$S(a)$ は $a = e^{-1}$ のとき，最小値をとる．

$a = e^{-1}$ のとき，$\alpha = 1$ であるから，最小値は

$$S(e^{-1}) = \int_0^1 (xe^{-x} - e^{-1}x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} (e^{-1}x - xe^{-x})dx$$
$$= \left[-(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-1}x^2\right]_0^1 + \left[-(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-1}x^2\right]_{\sqrt{2}}^1$$
$$= 1 - 4e^{-1} + \left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\ (答)$$

である．

$\boxed{6}$ (35 点)

n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

《解答》

m を自然数とし，X と同様にして m 桁の数 X_m を作るとき，X_m を 3 で割った余りが

0 である確率を a_m

1 である確率を b_m

2 である確率を c_m

とし，m 個目の箱から取り出したカードの数を Y_m とする．

X_m が 3 で割り切れるのは，並べたカードの数の和が 3 の倍数のときである．

$X_{m+1} \equiv 10X_m + Y_{m+1} \equiv X_m + Y_{m+1} \pmod{3}$

に注意すると，X_{m+1} が 3 で割り切れるのは次の 3 つの場合がある．

・$X_m \equiv 0 \pmod{3}$ かつ $Y_{m+1} \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

・$X_m \equiv 1 \pmod{3}$ かつ $Y_{m+1} \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

・$X_m \equiv 2 \pmod{3}$ かつ $Y_{m+1} \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

よって，$m = 1, 2, \cdots\cdots$ で

$$a_{m+1} = \frac{1}{5}a_m + \frac{2}{5}b_m + \frac{2}{5}c_m$$

が成立する．すべての m で

$$a_m + b_m + c_m = 1$$

より

$$a_{m+1} = \frac{1}{5}a_m + \frac{2}{5}(1 - a_m) = -\frac{1}{5}a_m + \frac{2}{5}$$

である．よって

$$a_{m+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(a_m - \frac{1}{3}\right)$$

であり

$$a_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

であるから

$$a_m - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{m-1} \qquad \therefore\ a_m = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{m-1}$$

である．

以上より，求める確率は

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots (答)$$

である．