強者の戦略

(1)　$\tan 1°$ は有理数か.

(2)　$\tan 19°$ は有理数か.

(3)　$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 89$ とするとき，$\tan m°$ が有理数となるような整数 m の値を全て求めよ.

【解】

(1)　$\tan 1°$ が有理数であると仮定すると，$\tan n°$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30)$ が有理数となることを帰納法で示す.

仮定より $\tan 1°$ は有理数であり，このとき $\tan k°$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 29)$ が有理数であるとしたら $\tan(k+1)°=\dfrac{\tan k°+\tan 1°}{1-\tan k°\cdot\tan 1°}$ より $\tan(k+1)°$ も有理数になるので，帰納法により，$\tan n°$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30)$ は有理数である.

よって，$\tan 30°$ が有理数であると言えるが，$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることから矛盾.

したがって，$\tan 1°$ は無理数である.

(2)　$\tan 19°$ が有理数であると仮定すると，$\tan(19°\cdot n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30)$ も有理数となることを帰納法で示す.

仮定より $\tan 19°$ は有理数であり，このとき $\tan(19°\cdot k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 29)$ が有理数であるとしたら

$\tan\bigl(19°\cdot(k+1)\bigr)=\dfrac{\tan(19°\cdot k)+\tan 19°}{1-\tan(19°\cdot k)\cdot\tan 19°}$ より

$\tan\bigl(19°\cdot(k+1)\bigr)$ も有理数になるので，帰納法により，$\tan(19°\cdot n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30)$ は有理数である.

ここで，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30$ において $\tan(19°\cdot n)$ は全て定義される．何故ならば，偏角が $19°\cdot n=90°+180°\cdot N$（$N=0,\ 1,\ \cdots\cdots$）の形で表されるとしたとき，右辺は 90 の倍数であり，19 と 90 は互いに素であるので，自然数 n は 90 の倍数に限られるからである.

よって，$n=30$ のとき，すなわち，$\tan 570°$ が有理数であると言えるが，$\tan 570°=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることから矛盾.

したがって，$\tan 19°$ は無理数である.

(3)　まず，$m=0,\ 45$ のとき $\tan m°$ は有理数である.

また，$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 44$ において $\tan m°$ が有理数であるとすると，$\tan(90°-m°)=\dfrac{1}{\tan m°}$ より $\tan(90°-m°)$ も有理数であると言えるので，残りは $m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 44$ の範囲で考えれば十分である.

以下，この範囲において，$\tan m°$ は無理数であることを示す.

(i)　m が 9 の倍数でないとき

(1)，(2) と同様に考えることにより，$\tan m°$ が有理数であると仮定すると，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n'$（$n'$ は nm が初めて 30 の倍数となる n の値）において $\tan nm°$ が有理数であることが帰納的に成り立つ.

ここで，n' の最小性から，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n'-1$ において nm は 30 の倍数ではないので $\tan nm°$ は定義され，$n=n'$ においては $n'm$ は m が 9 の倍数でないことから，$n'm=30l$（l は 3 と互いに素な自然数）の形で表せるので，$\tan n'm°$ は定義される.

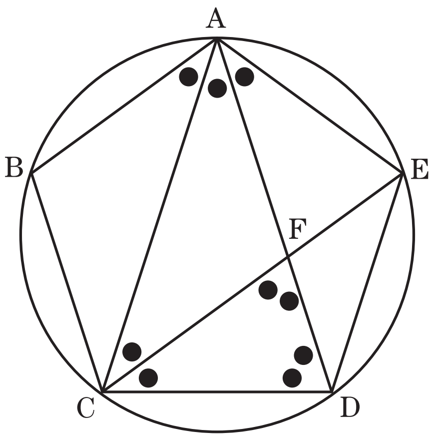
このとき，$\tan n'm°=\tan(30°\cdot l)$ は，

$\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のいずれかの値をとること

から矛盾.

よって, $\tan m^\circ$ は無理数である.

(ii) m が 9 の倍数であるとき



上図の 1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE において，対角線の長さを x とする．このとき $\triangle$ ACD $\backsim \triangle$ CDF より

$$x : 1 = 1 : x-1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore \ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

であるから，三角形 ACE で余弦定理より

$\cos 72^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$ を得る.

よって，これより， $\tan^2 72^\circ = 5 + 2\sqrt{5}$ ゆえ， $\tan^2 72^\circ$ が無理数，すなわち， $\tan 72^\circ$ が無理数であることがわかるので，(i) における論法の対偶から $\tan 9^\circ$，$\tan 18^\circ$，$\tan 36^\circ$ が無理数であることが言える.

さらに， $\tan 9^\circ$ が無理数であることから

$\tan 81^\circ = \dfrac{1}{\tan 9^\circ}$ より $\tan 81^\circ$ も無理数であるので，同様に $\tan 27^\circ$ が無理数であることが言える.

以上より，$m = 1$，2，……，44 において $\tan m^\circ$ が無理数であることが示されたので，求める値は $m = 0$，45 である.

（補足）

・(1) は， $\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると倍角公式により $\tan 2^\circ$，$\tan 4^\circ$，$\tan 8^\circ$，$\tan 16^\circ$，$\tan 32^\circ$ が有理数であることが言え，これより

$\tan 30^\circ = \tan(32^\circ - 2^\circ) = \dfrac{\tan 32^\circ + \tan 2^\circ}{1 - \tan 32^\circ \cdot \tan 2^\circ}$ として矛盾を導く手法もあるが，(2)，(3) を考えれば，解答で見せた手法の方が汎用性が高い.

・(3) の場合分けに関しては，m が 9 の倍数であるときは $n'm$ が 30 の倍数であると同時に 90 の倍数になるので，分けて考えざるを得ないが，偏角が 9 の倍数であるものは，解答のように比較的容易に三角比の値を求めることが可能.

さらに，半角公式から $\tan 15^\circ$ は具体的に求まるので， $\tan 18^\circ$ とから加法定理で $\tan 3^\circ$ を求め，これを用いることにより， 3° 刻みでの三角比ならば具体的に求めることも可能.

以下，上記の手法とは全く異なる別解を，(1)，(3) に関して示す．（ほぼ同様なので，(2) は省略．）

【別解】

(1)　$\tan 1^\circ = \dfrac{b}{a}$（$a$ と b は互いに素な自然数）と表せたとすると，$\tan(2n-1)^\circ \fallingdotseq \pm 1$

($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 23$) となることを示す．

そのために，まず，明らかに $a \fallingdotseq 1$ であるから，a で割り切れる自然数 x と，a で割り切れない自然数 y を用いて $\tan(2n-1)^\circ = \dfrac{y}{x}$

($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 23$) と表せることを帰納法で示す．

$\tan 1^\circ$ は仮定より，分母が a で割り切れ，分子が a で割り切れない．

$\tan(2k-1)^\circ = \dfrac{d}{c}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 22$）と表せたとする．このとき，$c$ が a で割り切れ，d が a で割り切れないとすると

$$\tan(2k)^\circ = \frac{\tan(2k-1)^\circ + \tan 1^\circ}{1-\tan(2k-1)^\circ \cdot \tan 1^\circ} = \frac{ad+bc}{ac-bd}$$

$$\tan(2k+1)^\circ = \frac{\tan(2k)^\circ + \tan 1^\circ}{1-\tan(2k)^\circ \cdot \tan 1^\circ}$$
$$= \frac{a^2d+2abc-b^2d}{a^2c-2abd-b^2c} = \frac{a(ad+2bc)-b^2d}{a(ac-2bd)-b^2c}$$

であり，b^2c が a で割り切れ，b^2d が a で割り切れないので，$\tan(2k+1)^\circ$ は分母が a で割り切れ，分子が a で割り切れない．

よって，帰納的に $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 23$ において $\tan(2n-1)^\circ$ は分母が a で割り切れ，分子が a で割り切れないことが言えるので，これより，分母と分子は不一致ゆえ，$\tan(2n-1)^\circ \fallingdotseq \pm 1$ が言える．しかし，$\tan 45^\circ = 1$ より矛盾．

したがって，$\tan 1^\circ$ は無理数である．

(3)　まず，$m=0,\ 45$ のとき $\tan m^\circ$ は有理数であり，残りは $m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 44$ の範囲で考えれば十分である．

以下，$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 44$ において $\tan m^\circ$ は無理数であることを示す．

(i)　m が奇数のとき

$\tan m^\circ$ が ± 1 ではない有理数ならば，

$\tan m^\circ = \dfrac{b}{a}$　（a と b は互いに素な自然数）とおき，$0 < \tan m^\circ < 1$ より $a \fallingdotseq 1$ ゆえ a で割った余りを考えることにより，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n''$（$n''$ は nm が初めて 45 の倍数となる n の値）において $\tan nm^\circ$ も ± 1 でない有理数であることが帰納的に成り立つ．

ここで，n'' の最小性から，

$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n''-1$ において nm は 45 の倍数ではないので $\tan nm^\circ$ は定義され，$n=n''$ においては $n''m$ は m が奇数であることから，

$n''m=45l$（l は奇数）の形で表せるので，

$\tan n'm^\circ$ は定義される．

このとき，$\tan n''m^\circ = \tan(45^\circ \cdot l)$ は，1，-1 のいずれかの値をとることから矛盾．

よって，$\tan m^\circ$ は無理数である．

(ii)　m が偶数のとき

$$\tan(45^\circ - m^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan m^\circ}{1+\tan 45^\circ \cdot \tan m^\circ} = \frac{1-\tan m^\circ}{1+\tan m^\circ}$$

であるから，$\tan m^\circ$ を有理数と仮定すると，

$\tan(45^\circ - m^\circ)$ は有理数となる．

しかし，m は偶数より $45-m$ は奇数ゆえ，

(i) より $\tan(45^\circ - m^\circ)$ は無理数であるから矛盾．

よって，$\tan m^\circ$ は無理数である．

以上より，求める値は $m=0,\ 45$ である．

【参考】

別解における手法を用いれば，偏角を「整数」でなく「有理数」に拡張しても結果は変わらない．

すなわち，$0 \leqq q < 90$ を満たす有理数 q に対して，$\tan q^\circ$ が有理数となるのは，$q=0$，45 に限る．

以下，(3) とほぼ同様であるが，それを示す．

q を，$0<q<45$ を満たす有理数全体，すなわち，$q=45\cdot\dfrac{t}{s}$ とおき，s，t を $1 \leqq t < s$ を満たす互いに素な自然数全体として考えたとき，$\tan q^\circ$ が無理数であることを示せば十分である．

$\tan q^\circ$ が有理数であると仮定して矛盾を示す．

(i)　t が奇数のとき

(3) と同様にすることにより，$\tan q^\circ$ が ± 1 ではない有理数ならば，$n=1$，2，……，n''（n'' は nq が初めて 45 の倍数となる n の値）において $\tan nq^\circ$ も ± 1 でない有理数であることが帰納的に成り立つ．

ここで，n'' の最小性から，
$n=1$，2，……，$n''-1$ において nq は 45 の倍数ではないので $\tan nq^\circ$ は定義され，$n=n''$ においては $n''q$ は t が奇数であることから，
$n''q=45l$（l は奇数）の形で表せるので，
$\tan n''q^\circ$ は定義される．

このとき，$\tan n''q^\circ=\tan(45^\circ\cdot l)$ は，1，-1 のいずれかの値をとることから矛盾．

よって，$\tan q^\circ$ は無理数である．

(ii)　t が偶数のとき

$$\tan\left(45^\circ\cdot\frac{s-t}{s}\right)=\tan\left(45^\circ-45^\circ\cdot\frac{t}{s}\right)$$
$$=\tan(45^\circ-q^\circ)=\frac{1-\tan q^\circ}{1+\tan q^\circ}$$

であるから，$\tan q^\circ$ を有理数と仮定すると，

$\tan\left(45^\circ\cdot\dfrac{s-t}{s}\right)$ は有理数となる．

しかし，t は偶数であり，s と t は互いに素より s は奇数ゆえ，$s-t$ は $1 \leqq s-t < s$ を満たす奇数である．このとき，(i) より $\tan\left(45^\circ\cdot\dfrac{s-t}{s}\right)$ は無理数であるから矛盾．

よって，$\tan q^\circ$ は無理数である．

以上より，$q=0$，45 以外の有理数において $\tan q^\circ$ は無理数であるから，題意は示された．

（研伸館数学科　野口）