強者の戦略

数学第３問

数学科の川﨑です．今回は，大阪大学（後期）の問題から出題します．かなりのボリュームがありますが，夏休みということでまとまった時間がとれると思いますので，納得いくまで考え抜いてください．

最後に証明する結果は誰でも知っていることですが，いざ証明するとなると大変です．“知っている”に満足せず“示せる”まで自分を高めておくと強者への道が開けてきます．

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0=\pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt,\quad I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt\quad (n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}<e^x\quad (x>0)$ が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式 $I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots\cdots\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u}\quad (u>0)$ が成立することを示せ．

(2) I_0，I_1 の値を求めよ．また，漸化式 $I_{n+1}=\dfrac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\quad (n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$ が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定する．$A_0=I_0$，$A_n=p^nI_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots\cdots\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

【2003 年　大阪大学　理系後期　第４問】