強者の戦略

数学第3問　積分（ⅢC）　解答

前回の問題の解答です。

［解］(1) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}<e^x \ (x>0)$ の証明

$$f_n(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

とおき、$x>0$ において、$f_n(x)>0$ ——① を示せばよい。
これを n についての数学的帰納法で示す。

(Ⅰ) $n=1$ のとき、

$$f_1'(x)=e^x-1>0$$

なので、$f_1(x)$ は単調に増加し、$f_1(x)>f_1(0)=0$
となり、①は成立する。

(Ⅱ) $n=k$（k はある自然数）のとき、

$$f_k(x)>0$$

を仮定すると、

$$f_{k+1}'(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)$$
$$=f_k(x)>0$$

となるので、$f_{k+1}(x)$ は単調に増加し、$f_{k+1}(x)>f_{k+1}(0)=0$
となり、$n=k+1$ のときも①は成立する。

以上、(Ⅰ)、(Ⅱ)よりすべての自然数 n で、①が成立する。□

$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u} \ (u>0)$ の証明

上の不等式で、$x=\pi u\ (>0)$ として、

$$1+\frac{\pi u}{1!}+\frac{\pi^2u^2}{2!}+\cdots+\frac{\pi^nu^n}{n!}<e^{\pi u}$$

$$\Leftrightarrow \pi+u\cdot\frac{\pi^2}{1!}+u^2\cdot\frac{\pi^3}{2!}+\cdots+u^n\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}<\pi e^{\pi u} \quad ②$$

となる。さらに、$0<t<1$ で、$0<1-t<1$、$0<\sin\pi t<1$
なので、

$$I_0=\pi\int_0^1\sin\pi t\,dt<\pi\int_0^1 1\,dt=\pi$$

$$I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt$$
$$<\frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 1\,dt$$
$$=\frac{\pi^{n+1}}{n!}\quad(n=1,2,\cdots\cdots)$$

となる。よって、

$$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots\cdots+u^nI_n$$
$$<\pi+u\cdot\frac{\pi^2}{1!}+u^2\cdot\frac{\pi^3}{2!}+\cdots\cdots+u^n\frac{\pi^{n+1}}{n!}\quad ③$$

となるので、②、③より示すべき不等式を得る。□

(2)

$$I_0=\pi\cdot\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1$$
$$=2$$

$$I_1=\pi^2\int_0^1 t(1-t)\sin\pi t\,dt$$
$$=\pi^2\int_0^1 t(1-t)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt$$
$$=\pi^2\left[-\frac{1}{\pi}t(1-t)\cos\pi t\right]_0^1+\pi\int_0^1(1-2t)\cdot\cos\pi t\,dt$$
$$=\pi\left[\frac{1}{\pi}(1-2t)\sin\pi t\right]_0^1-\pi\int_0^1(-2)\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi t\,dt$$
$$=2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{\pi}$$

$I_{n+1}=\frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ の証明

$n\geqq 2$ のとき、

$$I_{n+1}=\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}\sin\pi t\,dt$$
$$=\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}\left(\left[-t^{n+1}(1-t)^{n+1}\cos\pi t\right]_0^1+\int_0^1(n+1)(t-t^2)^n(1-2t)\cos\pi t\,dt\right)$$
$$=\frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1(t-t^2)^n(1-2t)\cos\pi t\,dt$$
$$=\frac{\pi^n}{n!}\left(\left[(t-t^2)^n(1-2t)\sin\pi t\right]_0^1-\int_0^1\left(n(t-t^2)^{n-1}(1-2t)^2-2(t-t^2)^n\right)\sin\pi t\,dt\right.$$

$$= -\frac{\pi^n}{n!}\int_0^1 \left(n(t-t^2)^{n-1} - (4n+2)(t-t^2)^n\right)\sin \pi t\,dt$$

$\left((1-2t)^2 = 1-4(t-t^2)\right.$ として式変形$\left.\right)$

$$= \frac{\pi^n(4n+2)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin\pi t\,dt$$

$$- \frac{\pi^n}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\sin \pi t\,dt$$

$$= \frac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$$

となる。この計算は $n=1$ でも $(t-t^2)^0=1$, $0!=1$ とおけば成立するので、$n=1, 2, \cdots\cdots$ で示すべき不等式が成立する。

□

(3) $\pi = \frac{p}{q}$ (p, q は正の整数) と表されると仮定して矛盾を導く。$A_0=I_0$, $A_n = p^n I_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおく。まず

A_n が正の整数であること ―― ④

を数学的帰納法で示す。

(I) $n=0, 1$ のとき、

(2)より、$A_0=2$

$$A_1 = p\cdot\frac{4}{\pi} = 4q$$

で、これらは正の整数なので、④は成立する。

(II) $n=k, k-1$ (k はある自然数) で④が成立すると仮定すると、(2)の漸化式より、

$$A_{k+1} = p^{k+1}I_{k+1}$$
$$= \frac{4k+2}{\pi}\cdot p\cdot p^k I_k - p^2 p^{k-1} I_{k-1}$$
$$= q(4k+2)A_k - p^2A_{k-1}$$

なので A_{k+1} は整数であり、さらに、

$$I_{k+1} = \frac{\pi^{k+2}}{(k+1)!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin\pi t\,dt > 0$$

より $A_{k+1}>0$ である。よって、$n=k+1$ のときも④が成立する。

以上で、④が示せた。

すると、(1)の後半の不等式で、$u=p(>0)$ として、

$$I_0 + pI_1 + p^2I_2 + \cdots + p^nI_n < \pi e^{\pi p}$$

$$\iff A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n < \pi e^{\pi p}$$

となるが、④より、$n\to\infty$ とすると、左辺 $\to\infty$ となり、右辺は定数なので、これは矛盾である。ゆえに、π は無理数である。

□

<コメント>

2003年と言えば、"$\pi=3$" とするかどうかで一議論あった年ですが、その年に π は無理数であることを高校数学の範囲で証明させるという "粋" な出題を阪大はしてくれました。質・量ともに圧倒されそうになるかもしれませんが、その分証明できた時の達成感は大きいと思います。

以下、各小問ごとに補足を述べます。

(1) 前半の不等式は e^x の Taylor 展開から得られる不等式で頻出です。微分を用いましたが、$f_{k+1}(x)>0$ を示すには、

$$\int_0^x f_k(t)\,dt>0$$

を用いる方法もあります。

後半の不等式は前半の不等式をどう使うのか気付きにくいですが、右辺の $e^{\pi u}$ をヒントに(1)で $x=\pi u$ として、積分を定数で評価することに気付いて下さい。積分の評価は不慣れな人もいると思いますので、よく練習しておきましょう。

(2) 前半の積分計算は落ち着いてやれば問題ないと思います。後半の漸化式は部分積分でやりますが、$t(1-t)$ の形を崩さない工夫が必要です。

(3) A_n が整数であることは(2)の漸化式から直ちに示せますが、$A_n>0$ であることは積分の形から示します。視野を広くもちましょう。あとは、(1)で $u=p$ とすれば矛盾が生じます。

強者の戦略

＜πが無理数であることの別証明＞

この問題の方法以外にもπが無理数であることの証明として知られているものがありますので紹介します。

公式として、$f(x)$, $g(x)$ が何回でも微分可能であるとき、"積 $f(x)\cdot g(x)$ の n階導関数は、

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)} g^{(n-k)}\text{''}$$

というライプニッツの公式を用います。
（帰納法で簡単に証明できます。）

(証明) 以下、$\pi = \frac{p}{q}$ (p, q は自然数) と仮定して矛盾を導く。nを自然数として、

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (p-qx)^n$$

とおき、まず以下の補題を示す。

補題 (1) kを $0 \leqq k \leqq 2n$ をみたす自然数とするとき、$f^{(k)}(0)$, $f^{(k)}(\pi)$ はすべて整数

(2) $I = \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$ は整数

(証明)

(1) x^n, $(p-qx)^n$ はどちらも何回でも微分可能なので、上のライプニッツの公式を用いて、

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{k} {}_kC_l\, (x^n)^{(l)}\left((p-qx)^n\right)^{(k-l)}$$

となる。$0 \leqq k \leqq n-1$ ならば

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$$

である。また、$n \leqq k \leqq 2n$ ならば、

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\,{}_kC_n (x^n)^{(n)}\left((p-qx)^n\right)^{(k-n)}\Big|_{x=0}$$

$$= {}_kC_n\,(-q)^{k-n}\, n(n-1)\cdots(2n-k+1)\,p^{2n-k}$$

$$f^{(k)}(\pi) = \frac{1}{n!}\,{}_kC_{k-n}(x^n)^{(k-n)}\left((p-qx)^n\right)^{(n)}\Big|_{x=\pi}$$

$$= (-q)^n\,{}_kC_n\, n(n-1)\cdots(2n-k+1)\,\pi^{2n-k}$$

となりこれらはともに整数である。
($n \geqq 2n-k$ より $(-q)^n\pi^{2n-k}$ は整数に注意)

(2) $\int_0^\pi f^{(2k)}(x)\sin x\,dx$

$$= \left[-f^{(2k)}(x)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(2k+1)}(x)\cos x\,dx$$

$$= f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0) + \left[f^{(2k+1)}(x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f^{(2k+2)}(x)\sin x\,dx$$

$$\iff B_k = A_k - A_{k+1}$$

(ただし、

$$A_k = (-1)^k\int_0^\pi f^{(2k)}(x)\sin x\,dx$$

$$B_k = (-1)^k\left(f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\right)$$

)

が $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ で成立し、

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k = A_0 - A_n$$

である。左辺は(1)より整数で、$A_0 = I$ であり、$A_n = B_n = \frac{(2n)!}{n!}\cdot(-q)^n\cdot 2$ も整数なので、Iは整数である。

(補題の証明終わり)

πが無理数であることに戻ると、

$$(0) < I = \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}\sin x\,dx$$

$$\leqq \int_0^\pi \frac{p^n x^n}{n!}dx \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leqq \sin x \leqq 1 \\ 0 \leqq p-qx \leqq p \end{array}\right)$$

$$= \frac{p^n\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

となり、$n \to \infty$ とすると、$\frac{p^n\pi^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$ なので、nが十分大のとき、$0 < I < 1$ となり、これは(2)に矛盾する。よって、πは無理数である。 □

(最後の極限に $\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ を用いました。ハサミウチで証明できます。)

強者の戦略

〈おまけ〉

高校数学を超えてしまいますが、次の定理が知られています。（前回の野口先生の最後の定理のラジアンverです。）

定理

xが0以外の有理数で、$\tan x$が定義されるとき、$\tan x$は無理数である。（角度の単位はラジアン）

この定理を用いると、$\tan \pi = 0$は有理数なので、πが無理数であることが示せます。

今回は以上です。難しいところもありますが、じっくり味わって下さい。ではまた次回（3週間後ですが）

（数学科　川崎）