強者の戦略

前回の解答です。

(1) $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ （n：十分大）

とおく。$k=1,2,3,\cdots,n-1$ に対して

$k \leqq x \leqq k+1$ のとき，$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}$ より，

各辺積分して，

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$$

$$\iff \frac{1}{k+1} < \log(k+1)-\log k < \frac{1}{k}$$

となるので，これを $k=1,2,\cdots,n-1$ でたしあげて，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \log n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

となる。これから，

$$\log n+\frac{1}{n} < S_n < \log n+1$$

$$\iff 1+\frac{1}{n\log n} < \frac{S_n}{\log n} < 1+\frac{1}{\log n}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)=1$$

なので，ハサミウチの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\underline{1}$$

である。

(2) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$

とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) = & (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) \\ & + x(x-2)(x-3)\cdots(x-n) \\ & + x(x-1)(x-3)\cdots(x-n) \\ & + \cdots + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \end{aligned}$$

である。$x=0,1,2,\cdots,n$ のとき，$f'(x) \fallingdotseq 0$ で

あることに注意すると，

$$f'(x)=0 \iff g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-n}=0$$

であり，$f'(x)=g(x)f(x)$ である。$x=0,1,2,\cdots,n$

以外の x の前後で，$f(x)$ の符号が変化しないことから，

x_n は $g(x)$ の符号が変化する最小の x である。

- $x<0$ のとき，$g(x)<0$ なので，$x_n>0$ ——①
- $\lim_{x\to+0} g(x)=\infty$ かつ

  $g\left(\frac{1}{2}\right)=2-2-\frac{2}{3}-\cdots-\frac{2}{2n-1} \leqq 0$

  なので，$x_n \leqq \frac{1}{2}$ ——②

となり，①②から $0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ である。さらに，

$$g(x_n)=0 \iff \frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$$

が成立する。これで示せた。

(3) $0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ より，(1)の S_n を用いると，

$$\begin{aligned} S_n & < \frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n} \\ & \leqq 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \quad \text{——}(*) \\ & < 2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} \\ & = 2+S_{n-1} \\ & < 2+S_n \end{aligned}$$

となる。これと(2)の等式を用いると，

$$S_n < \frac{1}{x_n} < 2+S_n$$

$$\iff \frac{S_n}{\log n} < \frac{1}{x_n\log n} < \frac{2+S_n}{\log n}$$

であり，(1)より，$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log n}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2+S_n}{\log n}=1$

なので，ハサミウチの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n\log n}=1 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}x_n\log n=\underline{1}$$

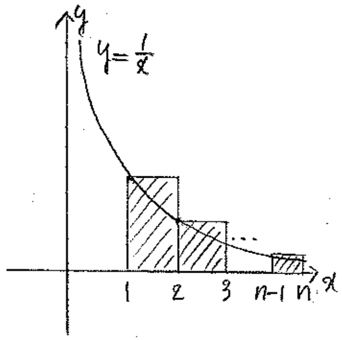
強者の戦略

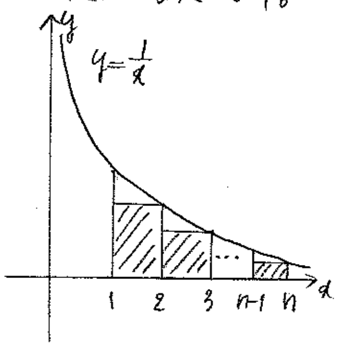
〈コメント〉

数学科の川崎です。今回の問題はいかがだったでしょうか？出題時にも述べましたが、(1)は有名問題なので、類題を経験している人も多かったことでしょう。初めて見たという人はしっかりマスターしておいて下さい。それだけで満足しては"人並み"ですので、強者を目指す皆さんは、(3)のように、結果を生かす問題を通じて、思考力を鍛えて下さい。

以下、小問ごとに補足を述べます。

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ についての問題です。この和を n で表すことは困難なので、評価にもちこみたいところです。下図のように長方形の面積と、$y=\frac{1}{x}$ と x軸で囲まれる部分の面積を比較するのが定石になっています。





(1)の結果から、nが十分大のとき、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \fallingdotseq \log n$$

となり、この和はゆるやかに発散することが分かります。$\log n$ との比が1なので、差も気になるところですが、これについては後述します。

(2) $f'(x)$は積の微分ですぐ出せますが、それをどう処理するかが問題です。展開して整理するのは大変なので、示すべき式の形をみて、$f'(x)/f(x)$ を考えることに気付いて下さい。$x\leqq 0$ で $f(x)\neq 0$ を示した後、$0<x\leqq\frac{1}{2}$ に $f(x)=0$ が解をもつことが示せればO.Kです。

(3) x_n の正体がよく分からないので、(2)を利用して評価にもちこむことを考えます。(2)で得られた等式を $\log n$ で割ることで、$\frac{1}{x_n\log n}$ が作れるので、あとは、$\frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}\right)$ を評価すれば良いことになり、ここに(1)を使って下さい。解答中の(＊)の部分が気付きにくいと思いますが、"(1)を使う"という方針で乗り切るしかないです。また、(＊)から

$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=2S_{2n}-S_n$$

として、(1)にもちこむこともできます。

〈オイラーのγ〉

左で述べた $S_n-\log n$ について考えてみましょう。

> 問. $a_n=S_n-\log n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とする。
> (1) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少数列であることを示せ。
> (2) $n\geqq 2$ のとき、$\frac{1}{2}<a_n<1$ を示せ。

(証明)

(1) $a_{n+1}-a_n<0 \iff \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n$

を示せばよいが、これは解答の(1)において示した

$\frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log k$ で、$k=n$としたものである。

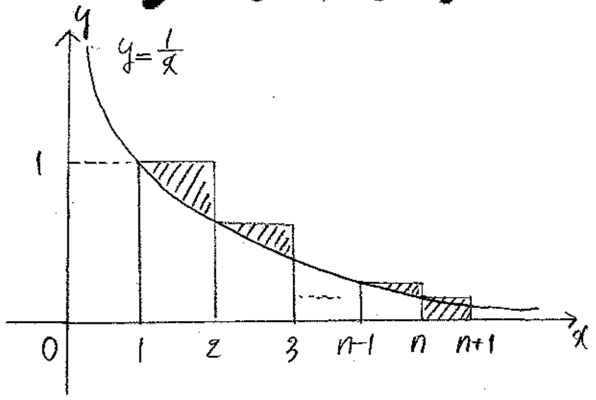
よって、$\{a_n\}$は単調減少数列」である。

(2) $a_n<1$ は解答の(1)で

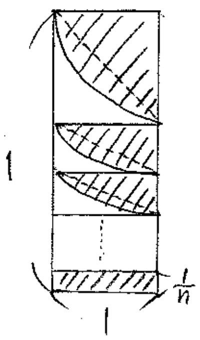
$$S_n<\log n+1$$

を示したので成立する。

強者の戦略



また、 $a_n = S_n - \log n$ は、上図の斜線部の面積を表し、(注：図は見やすくするため y 方向を長くしています)



左図のように斜線部を一番左の長方形(正方形)に集めると、$y=\frac{1}{x}$ が下に凸であることから、この面積は長方形の面積の半分より大きい。

よって、 $a_n > \frac{1}{2}$

以上から $\frac{1}{2} < a_n < 1$ が示せた。 □

高校範囲を超えてしまいますが、"下に有界な単調減少数列は収束する"という定理があるので、これを用いると、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \gamma$$

と収束し、さらに、(2)から $\frac{1}{2} \leqq \gamma < 1$ が分かります。実際

$$\gamma = 0.57721 \cdots$$

となり、この定数をオイラーの γ と言います。この数は無理数かどうかも分かっておらず、謎に満ちた数です。

今回は以上です。次回もお楽しみに。

(数学科　川﨑)