

# 強者の戦略

数学科の川崎です。今回は2009年度の京都大学の問題を出題します。私の方から整数問題を出すのは初めてですね。問題の設定としては非常に有名なのですが、そこに一ひねり入っているので、難易度は高くなっています。昨年度の強者たちを苦しめたであろう問題ですので、じっくり考えてみてください。

## 数学第12問 (I A II B)

$a$  と  $b$  を互いに素、すなわち1以外の公約数を持たない正の整数とし、さらに  $a$  は奇数とする。正の整数  $n$  に対して整数  $a_n, b_n$  を  $(a+b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$  をみたすように定めるとき、次の(1), (2)を示せ。ただし  $\sqrt{2}$  が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1)  $a_2$  は奇数であり、 $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。
- (2) すべての  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数であり、 $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。

【2009年 京都大学 前期 第6問】