強者の戦略

数学科の川﨑です．前回，明けましておめでとう的なコメントで始めましたが，気がつけば今年度は今回が最終回でした．早いものですね．（来年度も引き続き問題をアップしていく予定ですのでご期待ください．）

最後に微分を用いる証明問題を出題します．微分方程式の要素が若干入っていますが，誘導が丁寧なので，うまく乗って，有終の美を飾ってください．

数学第 16 問（Ⅲ C）

関数 $f(x)$ は微分可能で，$f'(x) \geqq f(x)$ が恒等的に成り立つものとする．また，関数 $g(x)$ は第 2 次導関数を持ち，$g(0)=0$ で，$g''(x) \geqq g(x)$ が恒等的に成り立つものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$(f(x)\,e^{-x})' \geqq 0$ が成り立つことを示せ．また，特に $f'(x)=f(x)$ が恒等的に成り立つとき

$$f(x)=f(0)\,e^{x}$$

であることを示せ．

(2)　$x>0$ において

$$\left(\frac{g(x)}{e^{x}-e^{-x}}\right)' \geqq 0$$

であることを示せ．

(3)　特に，$g''(x)=g(x)$ が恒等的に成り立つとき，$x \geqq 0$ において

$$g(x)=\frac{g'(0)(e^{x}-e^{-x})}{2}$$

であることを示せ．