

強者の戦略

数学科の笹谷です。これから1年間、よろしくお願いします。新しい年度が始まって、気分も一新しました。強者を目指す皆さんには、常に新鮮な気持ちで楽しみつつ数学に取り組んで欲しいと思います。今回の出題は2010年度の東北大最新入試からです。余裕のある人向けにテーマが似ている1999年の京大の問題も載せておきましょう。キーワードは「並び替え」です。東大の過去問を見たことのある人はデジャヴュを感じるかも!?

第1問

n を2以上の自然数とする。 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n, y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする。 z_1, \dots, z_n は y_1, \dots, y_n を任意に並び替えたものとするとき、

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

【2010年度東北大理系後期】

第2問

(1) $a_0 < b_0, a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0, b_0, a_1, b_1 について次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

(2) n 個の自然数 x_1, x_2, \dots, x_n は互いに相異なり、

$$1 \leq x_k \leq n \quad (1 \leq k \leq n)$$

を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}$$

【1999年度京大理系前期】