上手く問題文の意味がつかめたでしょうか？

チェビシェフの不等式と呼ばれる不等式の証明です．

第 1 問

n を 2 以上の自然数とする．

x_1，⋯，x_n，y_1，⋯，y_n は $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，$y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ を満たす実数とする．z_1，⋯，z_n は y_1，⋯ y_n を任意に並べ替えたものとするとき，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ．

【2010 年度東北大理系後期】

《考え方》

$\{z_i\}$ は $\{y_i\}$ を並び替えたものなので，加える順番を変えてもその和は変わりません．よって

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\,2}$$

となりますから，結局示すべき不等式は

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

です．

$n=2$，3 ぐらいで具体的に実験してみましょう．

$x_1 = 3$，$x_2 = 2$，$x_3 = 1$

$y_1 = 100$，$y_2 = 10$，$y_3 = 1$

として，y_i を適当に並び替えたものを考えると

$3\cdot10 + 2\cdot100 \leqq 3\cdot100 + 2\cdot10$ …… ①

$3\cdot10 + 2\cdot1 + 1\cdot100 \leqq 3\cdot100 + 2\cdot10 + 1\cdot1$ …… ②

となり，確かに y_i が大きい順に並んだものの方が，その他の並びのものよりも総和が大きくなっています．

$n=2$ のときは y_1 と y_2 のみが入れ替えられているので分かり易いですが，n が増えると並び替え方がすごい勢いで増え，手に負えません．よって，

「1 組ずつ並び替える」

という方針でいくことにしましょう．

《解答》

z_1，⋯，z_n は y_1，⋯ y_n を任意に並べ替えたものであるから，

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\,2}$$

が成り立つ．

示すべきことは

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^{\,2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

である．

$n \geqq 2$ のとき $(*)$ が成立することを数学的帰納法を用いて示す．

<u>(i)　$n=2$ のとき</u>

$(z_1, z_2) = (y_1, y_2)$ ならば，明らかに $(*)$ の等号が成り立つ．

$(z_1, z_2) = (y_2, y_1)$ ならば，

$(x_1y_1 + x_2y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)$

$= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$

$\therefore\ x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1$

より $(*)$ が成り立つ．

<u>(ii)　$n=k\ (k \geqq 2)$ のとき</u>

$x_1 > x_2 > \cdots > x_k$，$y_1 > y_2 > \cdots > y_k$ を満たす任意の実数と，y_1，⋯ y_n を任意に並べ替えた z_1，⋯，z_n について

$$\sum_{i=1}^{k} x_i y_i \geqq \sum_{i=1}^{k} x_i z_i$$

$$\iff x_1y_1 + \cdots + x_ky_k \geqq x_1z_1 + \cdots + x_kz_k$$

が成り立つと仮定する．

$n=k+1$ のときを示す．

$x_1 > x_2 > \cdots > x_k > x_{k+1}$，$y_1 > y_2 > \cdots > y_k > y_{k+1}$ とし，y_1，⋯，y_{k+1} を並べ替えて z_1，⋯，z_{k+1} になるとする．

強者の戦略

ここで，

$$z_{k+1}=y_j\ (1 \leqq j \leqq k+1)\ ,\ z_i=y_{k+1}\ (1 \leqq i \leqq k+1)$$

とし

$$s=x_1z_1+\cdots+x_iy_{k+1}+\cdots+x_kz_k+x_{k+1}y_j$$

$$s'=x_1z_1+\cdots+x_iy_j+\cdots+x_kz_k+x_{k+1}y_{k+1}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} s'-s&=(x_iy_{k+1}+x_{k+1}y_j)-(x_iy_j+x_{k+1}y_{k+1}) \\ &=(x_i-x_{k+1})(y_j-y_{k+1}) \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\iff\ s' \geqq s$$

となる．等号は $i=j=k+1$ のとき成立する．

よって，

$$\begin{aligned} & x_1z_1+\cdots+x_kz_k+x_{k+1}z_{k+1} \\ & \leqq x_1z_1+\cdots+x_kz_k+x_{k+1}y_{k+1} \\ & \leqq x_1y_1+\cdots+x_ky_k+x_{k+1}y_{k+1} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

が成り立つ．等号は $z_i=y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$ のとき成立する．

以上より，$(*)$ は 2 以上のすべての自然数 n について成立するから，題意は示された．

等号が成立するのは $z_i=y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のときである．

■

《解説》

ラストの項の x_{k+1} のペアとして，z_{k+1} と $z_i=y_{k+1}$ を比べたとき，後者の方が大きくなる $(s' \geqq s)$ ことを利用して証明しています．y_{k+1} が絡む 1 組のみ入れ替えて，論点を明確にしました．文字が多すぎてしっくりこない方は，具体例で考えてみてください．②の例でいえば，

$$2 \cdot 1+1 \cdot 100 \leqq 2 \cdot 100+1 \cdot 1$$

ですから，$z_3=100$ と $z_2=1\ (=y_3)$ を入れ替えて

$$3 \cdot 10+\underline{2 \cdot 1+1 \cdot 100} \leqq 3 \cdot 10+\underline{2 \cdot 100+1 \cdot 1}$$

が成り立ちます．

さらに項を一個減らし帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10+2 \cdot 1+1 \cdot 100 &\leqq \underline{3 \cdot 10+2 \cdot 100}+1 \cdot 1 \\ &\leqq \underline{3 \cdot 100+2 \cdot 10}+1 \cdot 1 \end{aligned}$$

とできますね．

さらなる強者向けに，背理法を利用した証明も紹介します．この場合も，

「1 組ずつ並び替える」

という方針は変わりません．

「実数を要素とする有限集合には最大値が存在する」ことは証明なしで用いてかまわないでしょう．

《別解》

数列 $\{y_i\}$ の項の並び替え方は有限であるから，集合

$$S=\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_iz_i \right\}$$

（ただし $\{z_i\}$ は $\{y_i\}$ の項を並び替えたもの）には最大値が存在する．

この最大値を与える数列 $\{z_i\}$ について

$$z_1>z_2>\cdots>z_n$$

でないと仮定すると，

$$z_i<z_j \text{ かつ } 1 \leqq i<j \leqq n$$

となる番号 i，j が存在する．ここで

$$s=x_1z_1+\cdots+x_iz_i+\cdots+x_jz_j+\cdots+x_nz_n$$

$$s'=x_1z_1+\cdots+x_iz_j+\cdots+x_jz_i+\cdots+x_nz_n$$

おけば，

$$\begin{aligned} s'-s&=(x_iz_i+x_jz_j)-(x_iz_j+x_jz_i) \\ &=(x_i-x_j)(z_i-z_j)<0 \end{aligned}$$

となり，s の最大性に反する．よって，$z_1>z_2>\cdots>z_n$ であり，$z_i=y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つ．

以上から，

$$\sum_{i=1}^{k} x_iy_i$$

が集合 S の最大値であり，$\{y_i\}$ の任意の並び替え $\{z_i\}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{k} x_iy_i \geqq \sum_{i=1}^{k} x_iz_i$$

$$\iff\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

が成り立つ．

■

第２問

(1)　$a_0 < b_0$，$a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0，b_0，a_1，b_1 について次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{b_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{a_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}>\frac{a_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{b_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}$$

(2)　n 個の自然数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n は互いに相異なり，

$$1 \leqq x_k \leqq n \ (1 \leqq k \leqq n)$$

を満たしているとする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{\ 2}}{k^2+1} > n-\frac{8}{5}$$

【1999 年度京大理系前期】

《考え方》

第 1 問と同じように考えます．

(2) の x_1，x_2，$\cdots$，x_n は 1，2，$\cdots$，n の並び替えですね．もちろん分子の小さい順に並んだ方が総和は小さくなります．上手く 1 組ずつ入れ替えて証明してください．(2) の後半は積分法を使って面積評価するとよいでしょう．数Ⅲの積分法を未習の方は，部分分数分解を利用した解法でもよいですが，ややテクニカルです．

《解答》

(1)　$a_0 < b_0$，$a_1 < b_1$ より

$$\left(\frac{b_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{a_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}\right)-\left(\frac{a_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{b_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}\right)$$
$$=\frac{b_1^{\ 2}-a_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}-\frac{b_1^{\ 2}-a_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}$$
$$=\frac{(b_1^{\ 2}-a_1^{\ 2})(b_0^{\ 2}-a_0^{\ 2})}{(a_0^{\ 2}+1)(b_0^{\ 2}+1)}>0$$

となるから，

$$\frac{b_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{a_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}>\frac{a_1^{\ 2}}{a_0^{\ 2}+1}+\frac{b_1^{\ 2}}{b_0^{\ 2}+1}$$

が成り立つ．

■

(2)　x_1，x_2，$\cdots$，x_n は 1，2，$\cdots$，n の並び替えである．

まず，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{\ 2}}{k^2+1} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1} \quad (n \geqq 1) \quad \cdots\cdots (**)$$

を数学的帰納法を用いて示す．

<u>(i)　$n=1$ のとき</u>

明らかに等号が成り立つ．

<u>(ii)　$n=2$ のとき</u>

$(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$ のとき，明らかに等号が成り立つ．

$(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$ のとき，(1) から

$$\frac{x_1^{\ 2}}{1^2+1}+\frac{x_2^{\ 2}}{2^2+1}=\frac{2^2}{1^2+1}+\frac{1^2}{2^2+1}$$
$$>\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}$$

となり，$(**)$ が成り立つ．

<u>(iii)　$n=m\ (m \geqq 2)$ のとき</u>

1，2，$\cdots$，m を並べ替えた m 個の任意の自然数 x_1，x_2，$\cdots$，x_m に対し

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{x_k^{\ 2}}{k^2+1} \geqq \sum_{k=1}^{m}\frac{k^2}{k^2+1}$$

$$\iff \frac{x_1^{\ 2}}{1^2+1}+\cdots+\frac{x_m^{\ 2}}{m^2+1} \geqq \frac{1^2}{1^2+1}+\cdots\frac{m^2}{m^2+1}$$

を仮定する．

$n=m+1$ のときを示す．

$x_i=m+1 \ (1 \leqq i \leqq m+1)$，

$x_{m+1}=j \ (1 \leqq j \leqq m+1)$

とし，

$$s=\frac{x_1^{\ 2}}{1^2+1}+\cdots+\frac{(m+1)^2}{i^2+1}+$$
$$\cdots+\frac{x_m^{\ 2}}{m^2+1}+\frac{j^2}{(m+1)^2+1},$$
$$s'=\frac{x_1^{\ 2}}{1^2+1}+\cdots+\frac{j^2}{i^2+1}+$$
$$\cdots+\frac{x_m^{\ 2}}{m^2+1}+\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2+1}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
s-s' &= \left(\frac{(m+1)^2}{i^2+1}+\frac{j^2}{(m+1)^2+1}\right) \\
&\qquad -\left(\frac{j^2}{i^2+1}+\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2+1}\right) \\
&= \frac{(m+1)^2-j^2}{i^2+1}-\frac{(m+1)^2-j^2}{(m+1)^2+1} \\
&= \frac{\{(m+1)^2-j^2\}\{(m+1)^2-i^2\}}{(i^2+1)\{(m+1)^2+1\}} \geqq 0
\end{aligned}
$$

$\iff \quad s \geqq s'$

となる．等号は $i=j=m+1$ のとき成立する．

よって，

$$
\begin{aligned}
&\frac{{x_1}^2}{1^2+1}+\cdots+\frac{{x_m}^2}{m^2+1}+\frac{{x_{m+1}}^2}{(m+1)^2+1} \\
\geqq\ &\frac{{x_1}^2}{1^2+1}+\cdots+\frac{{x_m}^2}{m^2+1}+\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2+1} \\
\geqq\ &\frac{1^2}{1^2+1}+\cdots\frac{m^2}{m^2+1}+\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2+1}
\end{aligned}
$$

が成立する．等号は $x_i=i\ (i=1，2，\cdots，m+1)$ のとき成立する．

以上より，すべての自然数 n に対して (**) が成立することが示された．

■

次に

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1} > n-\frac{8}{5}$$

を示す．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1} = n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$$

であるから，示すべきことは

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1} < \frac{8}{5}$$

である．

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}\ (x \geqq 0)$$

とおくと，$k-1 \leqq x \leqq k\ (k \geqq 1)$ において $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(k-1) \geqq f(x) \geqq f(k)$$

が成り立つ．等号は常には成立しないから

$$\int_{k-1}^{k} f(k-1)dx > \int_{k-1}^{k} f(x)dx > \int_{k-1}^{k} f(k)dx$$

$$\iff \quad f(k) < \int_{k-1}^{k} f(x)dx < f(k-1)$$

が成り立つ．左辺と中辺を $k=1，2，\cdots，n$ として加えると

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_0^n f(x)dx = \int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx$$

が成り立つ．

ここで，$x=\tan\theta$ とし，$\tan\theta_n = n\ \left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & n \\ \theta & 0 & \to & \theta_n \end{array}$ となるから

$$
\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx &= \int_0^{\theta_n}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\theta_n} d\theta \\
&= \theta_n < \frac{\pi}{2} < \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{8}{5}$$

が成り立つ．

以上から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1} > n-\frac{8}{5}$$

が示された．

■

《別解》（部分分数分解の利用）

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1} &= \frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+1} \\
&< \frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} \\
&= \frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}+1-\frac{1}{n} < \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

ところで，次の２つの問題を見比べてみてください．

第１問

n を２以上の自然数とする．

x_1，…，x_n，y_1，…，y_n は $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，$y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ を満たす実数とする．z_1，…，z_n は y_1，…y_n を任意に並べ替えたものとするとき，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ．

【2010 年度東北大理系後期】

---

n を２以上の自然数とする．

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ および $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を満足する数列 x_1，x_2，…，x_n および y_1，y_2，…，y_n が与えられている．y_1，y_2，…，y_n を並べ替えて得られるどのような数列 z_1，z_2，…，z_n に対しても

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ．

【1987 年度東大理科前期】

!? 偶然って，怖いですね．それではまた次回．

（笹谷）