# 強者の戦略

数学科の川﨑です．前回予告していた通り，今回は大きな定理の証明に挑んでもらいたいと思います．難しいですが，誘導をつけますので，流れにそって考えてみてください．この定理の系として，ある有名な事実が出てきます．

## 第１問（Ⅲ C）

$x$ 座標と $y$ 座標がともに有理数である点を有理点という．
曲線 $y^2=x^3-x$ 上の有理点は $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ のみであることを示せ．

（誘導）

有理数 $a=\dfrac{m}{n}$ ( 既約分数 ) に対して，$a$ の高さ $H(a)$ を $H(a)=\max(\ |m|\ ,\ |n|)$ と定めます．

曲線 $y^2=x^3-x$ 上に上記以外の有理点が存在すると仮定し矛盾を導きましょう．そのような有理点は $y\neq 0$ を満たします．このうち，$x$ 座標の高さが最小なものを $(x_0,\ y_0)$ とし，これよりも $x$ 座標の高さがさらに小さい有理点が作れることを以下の流れで示します．

(1)　$(x,\ y)$ が曲線 $y=x^3-x$ 上の $(0,\ 0)$ 以外の有理点であるとき，$\left(-\dfrac{1}{x},\ \dfrac{y}{x^2}\right)$ も有理点になるので，これから $x_0>1$ としてよいことを示してください．

(2)　$x_0>1$ として，$x_0=\dfrac{m}{n}$, $m>n>0$ と既約分数表示します．$m$ と $n$ の一方は偶数，一方は奇数であることを示してください．$x_0{}'=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$ として，点$\left(x_0{}',\ \dfrac{2y_0}{(x_0-1)^2}\right)$ を考えることがヒントです．

(3)　$y_0{}^2=x_0{}^3-x_0=x_0(x_0+1)(x_0-1)$ となりますが，$x_0$，$x_0+1$，$x_0-1$ のそれぞれが有理数の平方となることを示してください．(2) を使います．

(4)　前回の問題で定義した合成写像 $h\circ g:B\to D$ は全射なので

$$h\circ g(x_1,\ y_1)=(x_0,\ y_0)$$

となる有理点 $(x_1,\ y_1)$ が存在します．この $x_1$ に対して $H(x_1)<H(x_0)$ を示してください．
( 前回の問題を次頁に載せておきます．)

（前回の問題）

$\mathbb{Q}$ を有理数全体の集合とし，集合 $A$，$B$，$C$，$D$ を次のように定める．

$$A=\{(s,\ t,\ u)\mid s,\ t,\ u\in\mathbb{Q},\ s^2+1=t^2=u^2-1\}$$

$$B=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbb{Q},\ y^2=x(x+1)(x-1),\ y\neq 0\}$$

$$C=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbb{Q},\ y^2=x(x+1)(x-1)\}$$

$$D=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbb{Q},\ y^2=x(x+1)(x-1)\ \text{かつ}\ x,\ x+1,\ x-1\ \text{はどれも}\ \mathbb{Q}\ \text{の平方元}\}$$

また，写像 $f:A\to B$，$g:B\to A$，$h:A\to C$ を次のように定める．

$$f(s,\ t,\ u)=\left(s^2+1+st+tu+us,\ (s+t)(t+u)(u+s)\right)$$

$$g(x,\ y)=\left(\frac{x^2-2x-1}{2y},\ \frac{x^2+1}{2y},\ \frac{x^2+2x-1}{2y}\right)$$

$$h(s,\ t,\ u)=(s^2+1,\ stu)$$

このとき，以下の設問に答えよ．

(1)　$f$，$g$，$h$ は上の定義で写像になることを確認せよ．

(2)　$f$ の逆写像は $g$，$g$ の逆写像は $f$ であることを示せ．

(3)　合成写像 $h\circ g:B\to C$ の像は $D$ に一致することを示せ．