強者の戦略

数学科の竹本です．では解答解説に参りましょう．今回のポイントは

- **円に関する幾何知識**
- **反転**（言葉は覚えなくてもいいです）

です．そもそも最初の手すら思い付かなかった人は重要な考え方ですのでマスターしましょう！

数学第４問（IAIIB）

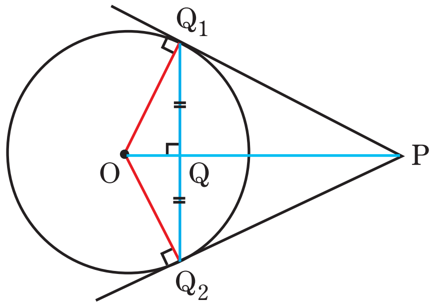
xy 平面上で，円 $C : x^2+y^2=1$ の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．点 P から円 C に引いた 2 つの接線の接点を $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とし，線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の中点を Q とする．点 P が円 C の外部で

$$x(x-y+1)<0$$

を満たす範囲にあるとき，点 Q の存在する範囲を図示せよ．

接線とあるので接点をおいて・・・とやると文字が多くなり詰みます．そこで，円と直線の関係について少し復習をしておきます．

1　円に接する直線は半径と直交する．
2　OP と $\mathrm{Q_1Q_2}$（極線）の交点 Q は $\mathrm{Q_1Q_2}$ を垂直に二等分する．



まさにこの問題の設定と同じですよね？？「ああ，なんだそんなことか」と後で解答を見たり解説を聞いたりしてこう言う人がいますが，試験中にこれが出てこなければアウトです．ちなみにこれは京大の過去問なのですが，平面幾何の知識って意外によく使います．というより平面幾何の知識のみで解ける図形問題って結構あります．図形が苦手な人はこのレベルからでもいいと思うので基礎知識を確認して下さい．

さて，解説に戻します．三角形 $\mathrm{OQ_1Q}$ と三角形 $\mathrm{OPQ_1}$ は相似なので

$$\mathrm{OQ} : \mathrm{OQ_1} = \mathrm{OQ_1} = \mathrm{OP} \iff \mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = \mathrm{OQ_1}^2 = 1$$

という関係が成り立ちます．これを見たときにぱっと解答の流れが思い浮かぶようにしたいですね．少し難しいのですがこれは反転と言われる問題です．簡単なイメージでいうと，この関係を満たすとき，円の外側の点が円の内側に，円の内側の点が外側に移るので円に関する裏返しという感じです．反転は同一直線上の計算なので，ベクトルを用いて計算します．あとは動点は消去するという軌跡の求め方に乗ればいいと思います．

《解答》

P$(a,\ b)$ は $x^2+y^2=1$ の外部と $x(x-y+1)<0$ を満たす範囲にあるので

$$a^2+b^2>1 \quad \text{かつ}\ a(a-b+1)<0 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす．Q$(X,\ Y)$ とおくと $\triangle \mathrm{OQ_1Q} \backsim \triangle \mathrm{OPQ_1}$ なので

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OQ_1}=\mathrm{OQ_1}=\mathrm{OP} \iff \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OQ_1}^2=1$$

となる．ゆえに O，Q，P が同一直線上にあることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad (\because \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1)$$

となるので

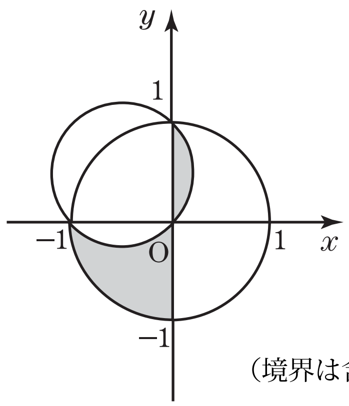
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff a=\frac{X}{X^2+Y^2},\, b=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

を満たす．ゆえに ① から a，b を消去すると

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2>1 \iff X^2+Y^2>(X^2+Y^2)^2$$
$$\iff X^2+Y^2<1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{X}{X^2+Y^2}\left(\frac{X}{X^2+Y^2}-\frac{Y}{X^2+Y^2}+1\right)<0$$
$$\iff X(X^2+Y^2+X-Y)<0$$
$$\iff \begin{cases} X>0 \\ \left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2} \end{cases} \ or\ \begin{cases} X<0 \\ \left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

となるので，② かつ ③ を満たす領域が求める領域である．よって以下の通り．



（境界は含まない）

＊　ちなみに ③ の領域は場合分けをしなくてもかけます．A・B＞0 タイプの領域は

1　A＝0，B＝0 をかく（これが境界となります）

2　1 の*図形上にない任意の点を元の不等式に代入して*

不等式を満たす＝その点を含む領域は求める領域

不等式を満たさない＝その点を含む領域は求める領域でない

3　求める領域とそうでない領域は交互に現れるので 2 を元にして領域を図示する

これは各自の課題とします．（できる人はやらなくてもいいですよ！）

〜あとがき〜

以上の通り，$x(x-y+1)<0$ という条件があるので一部になりますが，やはり $x^2+y^2=1$ の内側に出てきましたね！当然といえば当然ですが，意外にこれが解けないんですよね・・・．問題数を多く解くことも大事なのかもしれませんが，こういう良問から得られる知識を大事にしてもらいたいと思います．以下はおまけです．分からない人は解説をよく読んでから分からないところを各校舎の数学講師に質問して下さいね！

類題

円 $x^2+y^2=1$ へこの円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A，B として線分 AB の中点を Q とする．点 P が直線 $x+y-3=0$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

答え　円：$\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{18}$　（ただし $(0,\ 0)$ は除く）