強者の戦略

数学科の川崎です．前回フェルマーの最終定理の $n=4$ の場合を楕円曲線を用いて証明しました．実はこの定理は初等的な整数論の知識だけで証明することもできます．道のりはやはり長いですが，今年の入試問題に誘導付きで出題されていましたので，今回はそれを出題したいと思います．

第１問（ⅠＡⅡＢ）

p，q は互いに素な自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　p，q がともに奇数であるとき，p^4+q^4 は自然数の 2 乗にならないことを示せ．

(2)　q は奇数とする．次の手順にしたがって，$(2p)^4+q^4$ が自然数の 2 乗にならないことを背理法を用いて示せ．

(ｉ)　次の仮定 (H) が成り立つものとして，以下の問い (A)～(D) に答えよ．

仮定 (H) : $(2p)^4+q^4=r^2$ となる自然数 r が存在する．

(A)　$2p$ と r は互いに素になることを示せ．

(B)　互いに素な自然数 m，n があって，$r+(2p)^2=m^4$，$r-(2p)^2=n^4$ と表されることを示せ．

(C)　(B) の m，n について，$m+n=2a$，$m-n=2b$ とおく．p^2 を a，b を用いて表せ．

(D)　$2p_1$ と q_1 が互いに素になり，$p=2p_1q_1r_1$ かつ $(2p_1)^4+(q_1)^4=(r_1)^2$ となる自然数 p_1，q_1，r_1 が存在することを示せ．

(ⅱ)　(ｉ) の仮定 (H) が成り立たないことを示せ．

【2010 年度　福島県立医科大学　第 4 問】