強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（ⅠＡⅡＢ）

方程式

$$x^2-3y^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす非負整数の組 $(x,\ y)$ について考える．以下の設問に答えよ．

(1) $$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって，非負整数 $x_n,\ y_n$ を定めるとき，$(x_n,\ y_n)$ は方程式 ① を満たすことを示せ．

(2) 方程式 ① を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を一つとり

$$(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=x'+y'\sqrt{3}$$

によって，整数 $x',\ y'$ を定めるとき，$x'>0$，$y>y'\geqq 0$ であり $(x',\ y')$ は方程式 ① を満たすことを示せ．

(3) 方程式 ① を満たす非負整数の組 $(x,\ y)$ は (1) の $(x_n,\ y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ ですべてであることを示せ．

(解答)

(1) まず以下の２つの補題を示す．

補題１

有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ が

$$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$$

を満たすならば，$a=c,\ b=d$ である．

(補題１の証明)

$$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3} \iff (b-d)\sqrt{3}=c-a$$

であり，$b\neq d$ とすると

$$\sqrt{3}=\frac{c-a}{b-d}$$

となり，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾する．

よって，$b=d$ であり，これから $a=c$ も従う．

（補題１の証明終）

補題２

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で非負整数 $x_n,\ y_n$ を定めるとき

$$(2-\sqrt{3})^n=x_n-y_n\sqrt{3} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots(*)$$

が成立する．

（補題２の証明）

数学的帰納法で示す．

(i) $n=0$ のとき

$$(2+\sqrt{3})^0=1=1+0\cdot\sqrt{3}$$

より，$x_0=1,\ y_0=0$ である．すると

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^0&=1\\&=x_0-y_0\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから，$n=0$ のとき $(*)$ は成立する．

(ii) $n=k$ (k は 0 以上のある整数) のとき

$$(2-\sqrt{3})^k=x_k-y_k\sqrt{3}$$

であると仮定する．すると

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^{k+1}&=(2-\sqrt{3})^k(2-\sqrt{3})\\&=(x_k-y_k\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\\&=(2x_k+3y_k)-(x_k+2y_k)\sqrt{3}\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{k+1}&=(2+\sqrt{3})^k(2+\sqrt{3})\\&=(x_k+y_k\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\\&=(2x_k+3y_k)+(x_k+2y_k)\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから，補題１より

$$x_{k+1}=2x_k+3y_k,\ y_{k+1}=x_k+2y_k$$

となる．よって

$$(2-\sqrt{3})^{k+1}=x_{k+1}-y_{k+1}\sqrt{3}$$

となるので，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より 0 以上のすべての整数 n で $(*)$ は成立する．

（補題２の証明終）

((1) の証明)

x_n，y_n が非負整数であることは明らかであり，補題 1 より一意的に定まることが分かる．

補題 2 より

$$(x_n+y_n\sqrt{3})(x_n-y_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n$$
$$\iff \quad {x_n}^2-3{y_n}^2=1$$

であるから，$(x_n,\ y_n)$ は ① を満たす非負整数の組である．

(2)　$(x,\ y)$ を ① を満たす自然数の組であるとする．すなわち

$$x^2-3y^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x \geqq 1,\ y \geqq 1$$

が成り立つ．

$$(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=x'+y'\sqrt{3}$$

によって整数 x'，y' を定めるとき，この式の左辺は

$$(x+\sqrt{3}y)(2-\sqrt{3})=(2x-3y)+(2y-x)\sqrt{3}$$

であるから，(1) の補題 1 より

$$x'=2x-3y,\ y'=2y-x$$

である．② から

$$\begin{aligned}(2x)^2-(3y)^2&=4x^2-9y^2\\&=4(3y^2+1)-9y^2\\&=3y^2+4\\&>0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (2x)^2>(3y)^2$$
$$\iff \quad 2x>3y \quad (\because \quad \text{両辺正})$$
$$\iff \quad x'>0$$

である．また

$$x^2-y^2=2y^2+1>0$$

より

$$x^2>y^2 \iff x>y \quad (\because \quad \text{両辺正})$$

であるから

$$y-y'=x-y>0$$
$$\therefore \quad y>y'$$

である．さらに

$$\begin{aligned}(2y)^2-x^2&=4y^2-x^2\\&=4y^2-(3y^2+1)\\&=y^2-1\\&\geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (2y)^2 \geqq x^2 \iff 2y \geqq x \quad (\because \quad \text{両辺正})$$
$$\iff \quad y' \geqq 0$$

であるから，$y>y' \geqq 0$ である．

また

$$\begin{aligned}(x')^2-3(y')^2&=(2x-3y)^2-3(2y-x)^2\\&=(4x^2-12xy+9y^2)\\&\quad -3(4y^2-4xy+x^2)\\&=x^2-3y^2\\&=1 \quad (\because \quad ②)\end{aligned}$$

となるので，$(x',\ y')$ は方程式 ① を満たす．

(3)　方程式 ① を満たす非負整数の組 $(x,\ y)$ を任意にとる．明らかに $x \fallingdotseq 0$ である．また，$y=0$ であれば $x=1$ であるから，$(x,\ y)$ は (1) の $(x_0,\ y_0)$ に一致する．

$y \fallingdotseq 0$ のときを考える．このとき，(2) より

$$(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=x'+y'\sqrt{3}$$

として $(x',\ y')$ を定めると，$(x',\ y')$ も ① を満たす非負整数の組であり，$y>y' \geqq 0$ が成立する．同様の操作を繰り返し行うことで，$(x,\ y)$ の y の値はどんどん小さくなっていき，y 回以内には 0 になるので，$(x,\ y)$ は $(x_0,\ y_0)$ になる．すなわち

$$(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^m=(x_0+y_0\sqrt{3})$$

を満たす自然数 m が存在し，この両辺に $(2+\sqrt{3})^m$ をかけることで

$$\begin{aligned}x+y\sqrt{3}&=(x_0+y_0\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m\\&=x_m+y_m\sqrt{3}\end{aligned}$$

である．(1) の補題 1 より

$$x=x_m,\ y=y_m$$

となるから，方程式 ① を満たす非負整数の組 $(x,\ y)$ は (1) の $(x_n,\ y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ ですべてである．

□

（コメント）

数学科の川崎です．今年度は，「無限降下法」にこだわって出題してみました．このページを読んで，無限降下法が自分のものになっていれば嬉しいです．問題を見て無限降下法に気づけるだけでもだいぶ違うと思います．問題を見たら思わずニンマリしてしまうぐらいになるまで練習してくださいね．

さて, 今回は「ペル方程式」の問題を出題しました．ペル方程式の問題とは

$x^2-Dy^2=1$（または -1）

(D は平方数でない自然数)

の形の方程式の整数解・有理数解を考える問題のことです．ペル方程式の整数解・有理数解をすべて求めることは古くから研究されていて，代数的整数論という分野の有名問題です．本問は $D=3$ で右辺が 1 の場合を扱っています．右辺が 1 の場合は，自明な解 $(x,\ y)=(1,\ 0)$ を持つのですが，それ以外にも $(x,\ y)$ という自然数解があれば

$$(x+y\sqrt{D})^n=x_n+y_n\sqrt{D}$$

で定めた自然数の組 $(x_n,\ y_n)$ もペル方程式の解になります (本問の (1) と同様にして示せます)．自然数解 $(x,\ y)$ のうち，x が最小のものをこのペル方程式の最小解といいます (実はこのとき y も最小です)．最小解を $(a,\ b)$ とすると，このペル方程式の非負整数解は

$$(a+b\sqrt{D})^n=a_n+b_n\sqrt{D}\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

と定めたときの $(a_n,\ b_n)$ に限られることが知られていて, 本問 (3) は $D=3$ のとき, これを証明せよと言っています．

なお，この「強者への道」のページのコラム第１７回に吉田信夫先生がペル方程式にまつわる記事を書かれていますので，興味を持った人はそちらのほうもぜひ読んでみてください．

以下，問題ごとの補足です．

(1)　補題１は有名事実ですので，きちんと証明できるようにしておきましょう．これにより，係数比較ができるようになり，問題中の x_n，y_n がただ一つ定まる ($well-defined$ であると言います) ことが分かります．

(このページでも過去に第 24 回の数学の問題で補題 1 を扱う問題を紹介しています．覗いてみてください．)

補題２も一度は見たことある人が多いのではと思います．帰納法の中に出てくる，

「一つずらして漸化式を立てる」

という手法は頻出ですので，しっかりマスターしておいてください．

補題２を使うことに気づかないと (1) さえも手が出なかったかもしれませんが

$$x_n{}^2-3y_n{}^2=(x_n+y_n\sqrt{3})(x_n-y_n\sqrt{3})$$

から $x_n-y_n\sqrt{3}$ が必要になることに気づいてください．

(2)　x'，y' を x，y で表すこと，$(x',\ y')$ が方程式 ① を満たすことは単なる計算ですので，できるでしょう．不等式の評価がやや難しいですが ② の条件から 2 乗して比較するのが簡明です．

計算問題ですが，証明した $x'>0$，$y>y'\geqq 0$ が無限降下法を示唆する不等式になっていますね．式の形が重要です．

(3)　(2) をヒントに無限降下法を使いましょう．自然数解 $(x,\ y)$ に対しては，(2) で与えられた式で $(x',\ y')$ を作ると，これらも非負整数解で $y>y'$ と y が小さくなります．これがポイントです．この操作を繰り返せば y はどんどん小さくなり，最後は 0 になります．あとは $2-\sqrt{3}$ をかけた分だけ割ってあげれば証明終了です．

この問題は，1960 年代の京都大学の問題を，誘導を少し省略して出題したものです (原題は問題文が非常に長いので，読むのが大変だと思いこのような形にしました)．実は，1988 年に京大は再びこの問題を (少し形を変えて) 出題しています．その問題では $2+\sqrt{3}$ の代わりに

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

という行列を用いて，x'，y' を定義していました.

$$y'=2y-x,\ x'=-3y+2x$$

という形をみればこの行列の意味が理系の人は分かると思います.「良問は繰り返す」とある大学の先生がおっしゃっていましたが，まさにその通りですね．日頃から，取り組んでいる入試問題一題一題を大切にしてください.

高３生は，センター試験も終わりいよいよ最後の詰めの段階となりました．体調には気をつけて，本番で最高のパフォーマンスをしてきてください.

高１・高２生は，学年が変わるこの直前の時期に，他の人より一歩進んだ勉強をして，新年度いいスタートをきってください.

今年度１年間，このページの数学のコーナーにお付き合いいただきありがとうございました .

（数学科　川﨑）