強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（Ⅲ C）

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=1+\frac{1}{2+1},\ a_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+1}},$$

$$a_4=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+1}}},\ \cdots\cdots$$

で定める．すなわち

$$a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(解答１)

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$$

$$\iff\ a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{a_n+2}{a_n+1}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})a_n+2-\sqrt{2}}{a_n+1}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2})}{a_n+1}\quad\cdots\cdots\text{(A)}$$

である．この式から，帰納的に $a_n\fallingdotseq\sqrt{2}$ がすべての n で成り立つので，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{1}{(1-\sqrt{2})}\cdot\frac{a_n+1}{a_n-\sqrt{2}}$$

$$=-(\sqrt{2}+1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+1}{a_n-\sqrt{2}}+1\right)$$

$$=-(3+2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{a_n-\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=-(3+2\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{a_n-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

である．よって

$$\frac{1}{a_n-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{a_1-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left\{-(3+2\sqrt{2})\right\}^{n-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-1)\cdot\left\{-(3+2\sqrt{2})\right\}^{n-1}}{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}$$

$$\iff\ a_n-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-1)\cdot\left\{-(3+2\sqrt{2})\right\}^{n-1}}$$

である．$n\to\infty$ のとき，右辺は 0 に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$$

である．

(解答2)

解答１の (A) と同様にして

$$a_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(a_n+\sqrt{2})}{a_n+1}\quad\cdots\cdots\text{(B)}$$

である．(A)，(B) と $a_n\fallingdotseq\sqrt{2}$ より

$$\frac{a_{n+1}+\sqrt{2}}{a_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{a_n+\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}$$

であるから，$\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=C$ とおくと

$$\frac{a_n+\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}=\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{C^{n-1}}=\frac{1}{C^n}$$

$$\iff\ a_n=\frac{\sqrt{2}(1+C^n)}{1-C^n}$$

である．$|C|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$$

である．

(解答3)

まず，極限値を予想する．

$\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限確定値として存在すると仮定して，それを α とおくと，与えられた漸化式で $n\to\infty$ として

$$\alpha = 1+\frac{1}{1+\alpha} \iff \alpha^2 = 2$$
$$\therefore\ \alpha=\sqrt{2}$$
$$(\because\ a_n>0 \text{ より } \alpha \geqq 0)$$

である．

次に，$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ であることを示す．与えられた漸化式の両辺から $\sqrt{2}$ を引くと

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\sqrt{2} &= 1+\frac{1}{1+a_n}-\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1}{(1+a_n)(1+\sqrt{2})}(a_n-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

であるから，両辺の絶対値をとって

$$\begin{aligned} \left| a_{n+1}-\sqrt{2} \right| &= \frac{1}{(1+a_n)(1+\sqrt{2})}\left| a_n-\sqrt{2} \right| \\ &< \frac{1}{1+\sqrt{2}}\left| a_n-\sqrt{2} \right| \quad (\because\ a_n>0) \end{aligned}$$

よって，n が十分大のとき，この不等式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} \left| a_n-\sqrt{2} \right| &< \frac{1}{1+\sqrt{2}}\left| a_{n-1}-\sqrt{2} \right| \\ &< \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\left| a_{n-2}-\sqrt{2} \right| \\ &< \cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left| a_1-\sqrt{2} \right| \end{aligned}$$

$$\therefore\ 0 \leqq \left| a_n-\sqrt{2} \right| < \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left| a_1-\sqrt{2} \right|$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left| a_1-\sqrt{2} \right| = 0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left| a_n-\sqrt{2} \right| = 0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$$

である．

第2問（ⅠＡⅡＢ）

m を10以上50以下の自然数とし，n を2以上 m 未満の自然数とする．

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)$$
$$=(n+1)+(n+2)+\cdots\cdots+m$$

が成り立つような，$(m,\ n)$ の組をすべて求めよ．

(解答)

条件より

$$\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(m-n)(m+n+1)$$
$$\iff\ 2n^2=m(m+1)\ \cdots\cdots ①$$

である．ここで，m，$m+1$ は互いに素であり，偶奇が異なるので，一方は奇数の平方数，もう一方は $2\times$(平方数)である．

$10\leqq m\leqq 50$ より，奇数の平方数として考えられるのは25，49しかないので

$$m=25,\ 49 \text{ または } m+1=25,\ 49$$

すなわち

$$(m,\ m+1)$$
$$=(25,\ 26),\ (49,\ 50),\ (24,\ 25),\ (48,\ 49)$$

であることが必要である．さらに，奇数の平方数でないものが $2\times$(平方数)となっていれば十分で，これを満たすのは

$$(m,\ m+1)=(49,\ 50)$$

のみである．このとき，①より

$$n=\sqrt{\frac{49\cdot 50}{2}}=35$$

であるから求める $(m,\ n)$ の組は

$$(m,\ n)=(49,\ 35)$$

である．

※　出題時に述べた，m が 10 以上 50 以下の条件を外すとどうなるかについては，以下のコメントの（☆）の部分を読んでください．

（コメント）

数学科の川﨑です．新年度最初の問題はいかがだったでしょうか？易しかったですか？入試で出題されたらどちらも完答したい問題です．できなかった人は，数列・極限・整数にまだ不慣れなところがあると思いますので，しっかり復習・練習をしておいてくださいね．

以下問題ごとのコメントです．

第１問は数Ⅲの極限の問題で，頻出テーマの問題を連分数とからめて出題しました．解答 1，解答 2 は漸化式から一般項を求める方法，解答 3 は漸化式を解かずに，不等式で極限を求める方法です．

まず，解答 1 について．この漸化式から (計算は煩雑ですが)，一般項を求めることができます．特性方程式：$\alpha=1+\dfrac{1}{1+\alpha}$ を解いて $\alpha=\sqrt{2}$ を出し，これを両辺から引きます．あとは逆数をとれば，よく知られた形に帰着されます．強者を目指すみなさんは，誘導なしでも a_n が求められるようにしておいてください．

次に解答 2 ですが，上にある特性方程式の解は $\alpha=\pm\sqrt{2}$ です．解答 1 ではこのうち極限値になる方だけを使って，式を変形しましたが，もう一つの解を使っても同様の式変形をすることができます．これら 2 式から一般項を求めることも可能です．

最後に解答 3 ですが，公比が 1 より小さい等比の形の不等式を作って，それを繰り返し用いることではさみうちに持ち込む手法はどこかでやったことあると思います．その不等式を作れれば勝ちですが，極限値 α を予想して，$a_n-\alpha$ の形を作ってみると，うまくいくことが結構あります．公比が 1 より小さいのがポイントですね．

次に第２問ですが，簡単な等差数列の和なので，立式はできると思います．あとは整数問題です．ポイントは

「連続する２つの自然数は互いに素である」

という有名事実です．これから，m，$m+1$ の一方は奇数の平方数となるので，m の候補をかなり絞り込むことができます．あとは，候補をすべてしらみつぶせば OK です．

(☆)

さて，ここからが本題です．m が 10 以上 50 以下という条件を外して考えてみたいと思います．

まず，m が一桁のときどうかと考えてみると，解答と同様にすれば $(m,\ n)=(8,\ 6)$ が簡単に見つかります．よって，$n=6$ や，この問題の解である $n=35$ に対して m が存在することが分かります．

ここで，第１問の数列を思い出しましょう．具体的に最初の数項を計算すると

$$a_2=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{7}{5}$$

で，これらの分母と分子の積は 6，35 となって，上の n の値と一致します．

これは偶然でしょうか？

こんな聞き方をするってことは偶然であるはずがないですね．もちろん関係があります．そして，この 2 つの問題をつなぐ鍵となるのが，前回数学 66 回で私が出題・解説した“Pell 方程式”なのです．これについて少し解説したいと思います（長くなりますが頑張って読んで下さい）．

まず，第２問の ① を満たす m，n が，

Pell 方程式

$$x^2-2y^2=\pm1 \quad \cdots\cdots ②$$

$(x,\ y$ は自然数)

と関係することを見ましょう．

m が偶数のとき，$m=2m'$ $(m'$ は自然数) とおくと

$$n^2=m'(2m'+1)$$

となり，m' と $2m'+1$ は互いに素なので，
m'，$2m'+1$ はどちらも平方数になります．よって

$$2m'+1=x^2,\ m'=y^2\ \ (x,\ y \text{ は自然数})$$

とおけて，この x，y は (2 式から m' を消去して)

$$x^2-2y^2=1$$

を満たします．このような x，y に対して

$$m=2y^2,\ n=xy$$

とすれば，これらは ① を満たします．

m が奇数のときも，$m=2m'-1$ (m' は自然数) とおくと

$$n^2=m'(2m'-1)$$

となり，上と同様にして

$$2m'-1=x^2,\ m'=y^2\ \ (x,\ y \text{ は自然数})$$

とおけて，この x，y は

$$x^2-2y^2=-1$$

を満たします．このような x，y に対して

$$m=2y^2-1,\ n=xy$$

とすれば，これらは ① を満たします．

以上から，n は Pell 方程式 ② の解となる $(x,\ y)$ の積で書けることが分かります．

次に，第１問の $\{a_n\}$ が Pell 方程式 ② の解を作り出すことを見ましょう．a_n は正の有理数なので

$$a_n=\frac{p_n}{q_n}\quad (p_n,\ q_n \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくことができます．漸化式から

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=1+\frac{1}{1+\dfrac{p_n}{q_n}}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}\quad \cdots\cdots(\#)$$

であり，p_n，q_n が互いに素ならば p_n+2q_n，p_n+q_n も互いに素なので (#) は両辺とも既約分数で，

$$p_{n+1}=p_n+2q_n,\ q_{n+1}=p_n+q_n$$

がすべての自然数 n で成り立ちます．すると

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2-2q_{n+1}^2 &=(p_n+2q_n)^2-2(p_n+q_n)^2 \\ &=-(p_n^2-2q_n^2) \end{aligned}$$

となるので，これと

$$p_1{}^2-2q_1{}^2=-1$$

より

$$p_n{}^2-2q_n{}^2=(-1)^n$$

となり，$(p_n,\ q_n)$ は ② を満たすことが分かります．

実は，Pell 方程式 ② の自然数解は

$$x_n+y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$$

を満たす自然数の組 $(x_n,\ y_n)$ で尽くされることが知られていて，この $(x_n,\ y_n)$ は上の $(p_n,\ q_n)$ と同じ漸化式を満たし，$x_1=p_1=1$，$y_1=q_1=1$ なので

$$x_n=p_n,\ y=q_n$$

です．すなわち，上の $(p_n,\ q_n)$ は Pell 方程式 ② のすべての自然数解を与えることが分かります．

以上から，第２問の $(m,\ n)$ を求めるには，第１問の $a_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ $(k \geqq 2)$ を計算し

k が奇数のときは

$$(m,\ n)=(2q_k{}^2,\ p_kq_k)$$

k が偶数のときは

$$(m,\ n)=(2q_k{}^2-1,\ p_kq_k)$$

とすればよいことになります．

この第２問は，

「ラマヌジャンの連分数」

として知られている問題です．インドの天才数学者ラマヌジャンは，第２問の m が 1500 以下の解を友人に尋ねられて，第１問の連分数との関係に即座に気付き，答えを求めたそうです．天才ってすごいですね．自分では気づかなくても，一見何のつながりもない問題がつながっていることを知ると，私は嬉しくなります．この嬉しさ・楽しさこそ数学を勉強する醍醐味だと思うので，このページでは皆さんの好奇心を刺激するような問題を出していきたいと思います．これからもどうぞお付き合いください．

ちなみに，余談ですが，今年度東大理科第２問・文科第２問に連分数が背景となっている問題が出題されています．理科の方の最後の設問では，昨年こだわってこの紙面で紹介した「**無限降下法**」を使う

問題も出題されていて，個人的にはニンマリしました．詳しくはコラムの第 22 回をご覧下さい．

それでは今回はこれぐらいで．次回をお楽しみに．

（数学科　川﨑）