強者の戦略

今回出題した問題は【2001　名古屋市大　医学部】の入試で出題された問題ですが，ほぼ同じ問題が【1992　東京大学　理科】で出題されていますので，東大の過去問に詳しい方は，一瞬で見抜けたことと思います．

それでは，問題を確認し，解答に移りましょう．

> 問題
>
> じゃんけんをして勝者が手の出し方によって定まった歩数だけ進む遊びがある．
>
> グーで勝ったときに3歩，チョキで勝ったときに6歩，パーで勝ったときに5歩進むとし，負けた場合もしくはあいこの場合には動かないものとする．
>
> いま，A，B二人があらかじめ決められた確率にしたがってグー，チョキ，パーを出すものとする．
>
> Bがどのような確率にしたがってグー，チョキ，パーを出しても，1回のじゃんけんでAの歩数の期待値がBの歩数の期待値よりも小さくならないようにしたい．Aがグー，チョキ，パーを出す確率をどのように決めればよいか．ただし，求める手順をわかりやすく説明すること．

（解答）

グー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ

A は p，q，r

B は p'，q'，r'

とおくと

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$r \geqq 0$，$p+q+r=1$　……①

$p' \geqq 0$，$q' \geqq 0$，$r' \geqq 0$，$p'+q'+r'=1$　……②

である．このとき

グーで勝つ確率は，A が pq'，B が $p'q$

チョキで勝つ確率は，A が qr'，B が $q'r$

パーで勝つ確率は，A が rp'，B が $r'p$

であるから，それぞれの歩数の期待値は

A：$3pq'+6qr'+5rp'$

B：$3p'q+6q'r+5r'p$

となる．

よって，② をみたす任意の p'，q'，r' に対して不等式

$3pq'+6qr'+5rp' \geqq 3p'q+6q'r+5r'p$　……③

が成り立つような，① をみたす p，q，r を考える．

（解答後半に続く）

［考察］

さて，ここで

「任意の～に対して不等式が成り立つような」

ときたので，

『絶対不等式としてとらえる』

『（恒等式っぽくとらえて）数値代入法』

の２つの道筋が思い浮かぶと思います．以下は，それぞれの解答の特徴を見てみましょう．

（解答後半）

（解法１）『絶対不等式としてとらえる場合』

② より

$r'=1-p'-q'$　……④

かつ

$$\begin{cases} p' \geqq 0 \\ q' \geqq 0 \\ p'+q' \leqq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots⑤$$

である．また，① より

$r=1-p-q$　……⑥

であるから，④，⑥ を ③ に代入して整理すると

$(5-14q)p'+(-6+14p)q'+6q-5p \geqq 0$　……③′

となる．（※）

［考察］

③′ の左辺は，変数の条件 ⑤ が図示できる 2 変数関数とみることができるので，線形計画法で最小値を考えることができます．ただし，(③′ の左辺)$=k$ とおいたときに，直線にならなかったり，q' 軸平行の直線になるときがあるので，場合分けを行います．

（（※）の続き）

i)　$p=\dfrac{3}{7}$ かつ $q=\dfrac{5}{14}$　のとき

（つまり，(③′ の左辺)$=k$ が直線にならないとき）

⑥ より $r=\dfrac{3}{14}$ であり，このとき

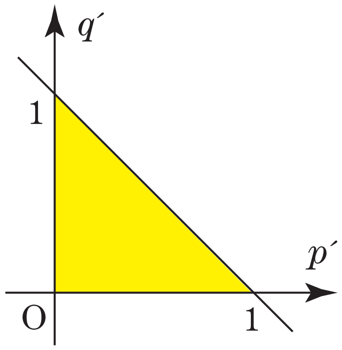
$(③'$ の左辺$)=0$

となるので ③′ は成立し，① もみたす．

ii)　$p=\dfrac{3}{7}$ かつ $q=\dfrac{5}{14}$　ではないとき

$k=(③'$ の左辺$)=f(p',\ q')$ ……⑦

とおき，⑤ をみたす p'，q' に対し，k の最小値を考える．⑤ をみたす p'，q' を平面に図示すると次図の色付き部分（境界を含む）．



A)　$p=\dfrac{3}{7}$ かつ $q \fallingdotseq \dfrac{5}{14}$　のとき

⑦ $\iff$ $k=(5-14q)p'+6q-5p$

となる．（これは q' 軸平行な直線で，線形計画法が使えないので，p' の 1 次関数と考えて）上の領域より $0 \leqq p' \leqq 1$ ゆえ

$5-14q>0$　のとき　$p'=0$

$5-14q<0$　のとき　$p'=1$

で k は最小値をとる．また，それぞれの最小値は

$f(0,\ 0)$　または　$f(0,\ 1)$

$f(1,\ 0)$

と同じ値となる（q' の値によらない）．

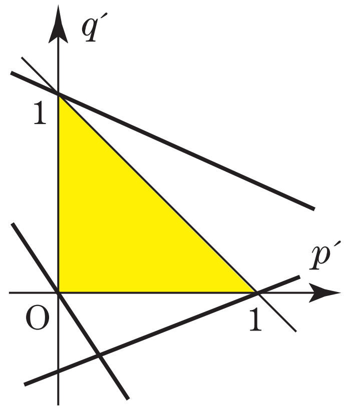
B)　$p \fallingdotseq \dfrac{3}{7}$　のとき

⑦ は $p'q'$ 平面上で，q' 軸に平行でない直線を表すので（q' 切片が最大，または，最小になるときに注目して）k の最小値は

$\min\{f(0,\ 0),\ f(1,\ 0),\ f(0,\ 1)\}$

(3 つの値のうち, 最も小さいもの) となる．（※※）

［参考］　直線の傾きや，k の係数の正負などで，いろいろなパターンがありますが，3 カ所のうち，いずれかの場所で，k は最小となります（この文書の一番最後に，場合分けを掲載していますので，必要に応じて参照してください）．



（（※※）の続き）

以上，A)，B) より，求める条件は

$\min\{f(0,\ 0), f(1,\ 0), f(0,\ 1)\} \geqq 0$

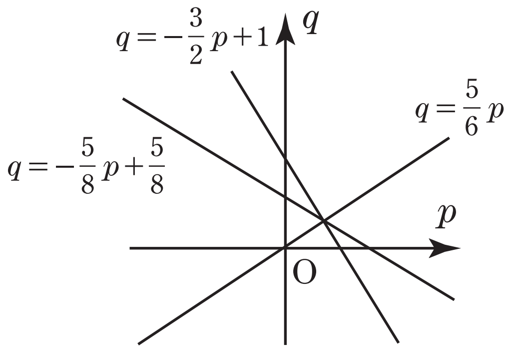
$$\iff \begin{cases} f(0,\ 0) \geqq 0 \\ f(1,\ 0) \geqq 0 \\ f(0,\ 1) \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6q-5p \geqq 0 \\ 5-8q-5p \geqq 0 \\ -6+6q+9p \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q \geqq \dfrac{5}{6}p \\ q \leqq -\dfrac{5}{8}p+\dfrac{5}{8} \quad \cdots\cdots ⑧ \\ q \geqq -\dfrac{3}{2}p+1 \end{cases}$$

となるが，これをみたすものは

$(p,\ q)=\left(\dfrac{3}{7},\ \dfrac{5}{14}\right)$

の 1 点のみ（下図参照）であり，不適．



以上より，求める値は

$$p=\frac{3}{7},\ q=\frac{5}{14},\ r=\frac{3}{14}$$

（コメント）

型通りに解くと，こちらの解法になると思います．最小値をとる場所を３カ所まで絞りこむことができて，かつ，１カ所に確定する必要がないことに気づけば，解くことができると思います．しかし，最小値をとる場所を確定しようとすると，直線を表す ⑦ の傾きや，k の係数の正負による場合分けが煩雑になってしまうので，注意が必要です．

（解法２）『数値代入法』を用いる場合

《（※）までは（解法１）と同様》

ここで，⑤ をみたす任意の p'，q' に対し，③′ が成り立つ条件を考えるので，まず ③′ に

$$(p',\ q')=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

を代入すると（解法１）の ⑧ が得られる．これをみたすものは，（解法１）の最後の図より

$$(p,\ q)=\left(\frac{3}{7},\ \frac{5}{14}\right)$$

のときのみであり，逆にこのとき

（③′ の左辺）$=0$

となり，③′ は成り立つ．以上と ⑥ より

$$p=\frac{3}{7},\ q=\frac{5}{14},\ r=\frac{3}{14}$$

であり，これは ① をみたすので，求める値である．

（コメント）

『数値代入法』を使うと，最後に逆のチェックは必要ですが，場合分けをしなくてもよくなるので，（解法１）よりも答案がスッキリします．

なので，個人的には（解法２）のほうが好みなのですが，『数値代入法』を使う場合

「$(p',\ q')$ にどの値を代入するか？」

を選ぶ際の理由が気になるところです．（解法１）の場合は，線形計画法を用いたときに領域の端の点を代入することになるので気づきやすいのですが……何か他に理由はないのでしょうか？

ここで，ちょっとだけ，ずるく考えて

「期待値で相手に負けないような
最善の確率（p，q，r）が存在する」

と仮定しましょう．そうすると，今考えているのは「B の手の出し方がどれだけうまくても，A のほうが歩数の期待値が小さくならない条件」なので，「B が最善の確率で手を出したときに，A のほうが歩数の期待値が小さくならない条件」さえ考えれば十分です．

ところが，A，B の二人には，勝ったときに進める歩数には差がない，つまり歩数に関する条件に対称性があるため，「B が最善の確率で手を出すなら，A も最善の手を出すしか，歩数の期待値で負けない方法はない」ということになります．このとき，二人の歩数の期待値の差は０になりますから

「③′ の不等式の『等号が成立する』とき」

があやしいな，と気づけるわけです．等号成立のとき，③′ は

$$(5-14q)p'+(-6+14p)q'+6q-5p=0 \quad \cdots\cdots⑨$$

となり，これが p'，q' についての恒等式となるための条件を考えたいので

$$6q-5p=0,\ 5-14q=0,\ -6+14p=0$$

を（もともとは不等式で係数比較法が使えないので，数値代入法で）導きたいです．そのためにまず ⑨ に

$$(p',\ q')=(0,\ 0)$$

を代入し，$6q-5p=0$ を導き，この条件のもとで

$$(p',\ q')=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

を代入すれば残りの２式が得られるから，③′ にも同じものを代入してみたらどうだろう……と考えるわけなのです．

（ちなみに，不等式ではなく「恒等式になるための条件」を考える問題が【2002　信州大】で出題されています）

強者の戦略

最終的な結果を見て

「確実に有利な手の出し方はなく

五分五分が精一杯」

ということに興味を覚えるのも，もちろん良いことなのですが，強者の皆さんであれば

「二人の条件は同じやねんから，確実に有利になるような手の出し方は，ないんちゃうん？」

と事前に勘づいて，最初からスッキリした答案を作成する，という段階を目指してみるのも，楽しいかもしれませんね．

（数学科　中西）

［補足］

（解法１）の ii) の B) において，最小値をとる場所を確定するときは，以下の場合分けを行います．必要に応じて，参照してください．

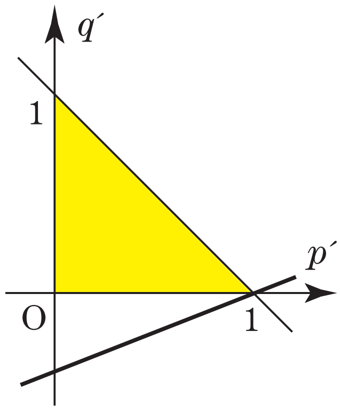
$$⑦ \iff q' = \frac{14q-5}{14p-6}p' + \frac{1}{14p-6}k + \frac{5p-6q}{14p-6}$$

まず，k の係数（の分母）の正負で場合分けし，さらに直線の傾きで場合分けを行う．

ア）　$14p-6>0$ のとき

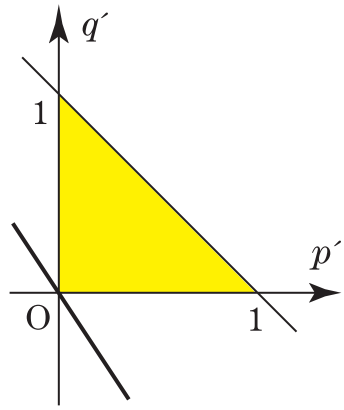
q' 切片が最小のとき，k も最小となる．

1)　$\dfrac{14q-5}{14p-6} \geqq 0$　のとき



（1，0）を通るとき最小．

2)　$\dfrac{14q-5}{14p-6} \leqq 0$　のとき

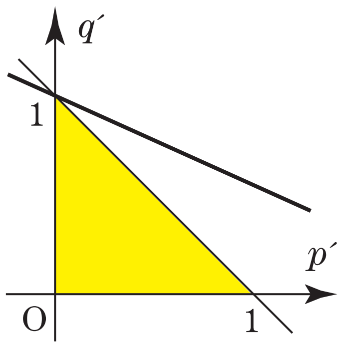


(0，0) を通るとき最小．

イ）　$14p-6<0$ のとき

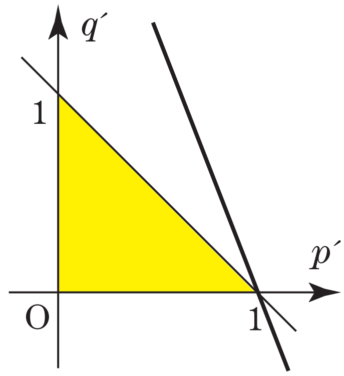
q' 切片が最大のとき，k は最小となる．

1)　$\dfrac{14q-5}{14p-6} \geqq -1$　のとき



(0，1) を通るときに最小．

2)　$\dfrac{14q-5}{14p-6} \leqq -1$　のとき



(1，0) を通るときに最小．

以上より

$$f(0,\ 0),\ f(1,\ 0),\ f(0,\ 1)$$

のいずれかが最小値となる．