強者の戦略

それでは，前回の解答です.

第１問（Ⅲ C）

$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}$$
$$g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする．このとき，以下のことが成り立つことを示せ.

(1)　任意の実数 x に対し，$f(x)>0$ である.

(2)　方程式 $g(x)=0$ はただ１つの実数解 α をもち，$-1<\alpha<0$ となる.

（解答 1）　まずは普通に解いてみます.

(1)
$$f'(x)=4x^3+3x^2+x+\frac{1}{6}$$
$$f''(x)=12x^2+6x+1=12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}>0$$

であるから，$f'(x)$ は単調に増加し

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)=-\infty$$

より，$f'(x)=0$ となる実数 x がただ１つ存在する．これを β とおくと，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

となる.

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}$$

であるから

$$f(\beta)=f'(\beta)\left(\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}\beta^2+\frac{1}{16}\beta+\frac{1}{32}$$
$$=\frac{1}{16}\beta^2+\frac{1}{16}\beta+\frac{1}{32}\quad(\because\ f'(\beta)=0)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{64}>0$$

であり，任意の実数 x に対し

$$f(x)\geqq f(\beta)>0$$

である.

□

(2)
$$g'(x)=5x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}$$
$$g''(x)=20x^3+12x^2+3x+\frac{1}{3}$$
$$g'''(x)=60x^2+24x+3=60\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}>0$$

であるから，$g''(x)$ は単調に増加し

$$\lim_{x\to\infty}g''(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}g''(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(20+\frac{12}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{3x^3}\right)=-\infty$$

より，$g''(x)=0$ となる実数 x がただ１つ存在する．これを γ とおくと $g'(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	γ	$\cdots$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↘		↗

となる.

$$g'(x)=g''(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}\right)+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{1}{40}$$

であるから

$$g'(\gamma)=g''(\gamma)\left(\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{20}\right)+\frac{3}{20}\gamma^2+\frac{1}{10}\gamma+\frac{1}{40}$$
$$=\frac{3}{20}\gamma^2+\frac{1}{10}\gamma+\frac{1}{40}\quad(\because\ g''(\gamma)=0)$$
$$=\frac{3}{20}\left(\gamma+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{120}>0$$

であり

$$g'(x) \geqq g'(\gamma) > 0$$

である．これより，$g(x)$ は単調に増加する．さらに

$$g(0) = \frac{1}{120} > 0$$

$$g(-1) = -\frac{11}{30} < 0$$

であるから，曲線 $y = g(x)$ は x 軸とただ 1 点で交わり，その交点の x 座標を α とすると

$$-1 < \alpha < 0$$

である．

よって，方程式 $g(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 α をもち，$-1 < \alpha < 0$ となる．

□

以上のように，ごりごりと計算をしていけば証明することができます．しかし, この解答では (1) が (2) に使えておらず，同じことを 2 度やった感があります．

$$g(x) = xf(x) + \frac{1}{120}$$

なので

$$g'(x) = xf'(x) + f(x)$$

などとしたくなりますが，これでも (1) からただちに $g'(x) > 0$ を導くことはできません．そこで，少し工夫をしてみましょう．

（解答 2）

$$f_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n!} \quad (n \geqq 1)$$

とする．

(1)　$x \fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{1}{x} = t$ とすると

$$\frac{f(x)}{x^4} = f_4(t)$$

である．

$$f_4'(t) = f_3(t),\ f_3'(t) = f_2(t)$$

であり

$$f_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(t+1)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

であるから，$f_3(t)$ は単調に増加する．さらに

$$\lim_{t\to\infty} f_3(t) = \infty,\ \lim_{t\to-\infty} f_3(t) = -\infty$$

であるから，$f_3(t) = 0$ となる実数 t がただ 1 つ存在する．これを a とおくと，$f_4(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f_3(t)$	$-$	0	$+$
$f_4(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

となる．

$f_3(0) = 1$ より，$a \fallingdotseq 0$ であることに注意すると

$$f_4(t) \geqq f_4(a) = f_3(a) + \frac{a^4}{4!} = \frac{a^4}{4!} > 0$$

であるから，$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$f_4(t) > 0 \iff \frac{f(x)}{x^4} > 0 \iff f(x) > 0$$

である．これと

$$f(0) = \frac{1}{24} > 0$$

より，任意の実数 x に対し $f(x) > 0$ である．

□

(2)　$g(0) = \dfrac{1}{120} \fallingdotseq 0$

であるから

$$g(x) = 0 \iff \frac{g(x)}{x^5} = 0$$
$$\iff f_5(t) = 0 \quad \left(\frac{1}{x} = t\right)$$

である．

$$f_5'(t) = f_4(t) > 0 \quad (\because\ (1))$$

であるから，$f_5(t)$ は単調に増加し

$$\lim_{t\to-\infty} f_5(t) = -\infty$$

$$f_5(-1) = \frac{11}{30} > 0$$

であるから，$f_5(t) = 0$ を満たす t がただ 1 つ存在

し，それを b とすると

$$b<-1$$

である．よって，$\dfrac{1}{b}=\alpha$ とおくと，α は方程式 $g(x)=0$ のただ 1 つの実数解であり，$-1<\alpha<0$ となる．

□

＜コメント＞

数学科の川崎です．いよいよ夏がやってきました．自分の自由な時間が一番とれる期間です．自由と言われると，逆に時間の使い方は難しいのですが，結果を追い求めてください．

今回の問題は 1994 年の東京大学の問題です．多項式の微分なので，一見易しそうに見えますが，やってみると意外と計算が煩雑で，適度に差がつく問題です．

まず (解答 1) について見ていきましょう．(1) は不等式の証明です．$f(x)$ を因数分解するのは困難なので，グラフを考えます．$f'(x)$ の符号もすぐには分からないので，もう 1 度微分することになります．

「符号が分からない部分は，微分して調べる」

というのは当たり前にしておいてください．これで $f(x)$ が最小になる点があることが分かります．ところがその点の x 座標は分からないので，解答では β とおきました．

「求まらなければ文字で置く」

です．β の値は分かりませんが，$f'(\beta)=0$ を用いれば $f(\beta)$ の符号を決めることができます．

(2) もグラフを考えて議論する問題です．$g'(x)$ の符号が知りたいのですが，すぐには分からないので，さらに微分していきます．$g''(x)$ が単調増加だと分かるので，(1) と同様にすると $g'(x)>0$ が示せて，$g(-1)$，$g(0)$ の符号を調べれば題意が示せます．

これで一件落着なのですが，もやもや感がありますよね？ (1) と (2) のつながりが見えないのは気持ち悪くありませんか？きっと，なにか裏があるはずです．

実はこの問題の f や g は，係数が特徴的な並びをしています．

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{120}$$

というのは

$$\frac{1}{0!},\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!},\ \frac{1}{5!}$$

となっていることに気づくでしょうか？そして，この係数を見て e^x のテーラー展開 (マクローリン展開)

$$e^x=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

が連想できればしめたものです．問題の f，g をこの展開式の形にするために

$$\frac{1}{x}=t$$

という置き換えをしてあげると，解答の $f_n(t)$ の形が隠れていることに気付きます．この $f_n(t)$ に対しては

$$f_{n+1}'(t)=f_n(t)\ \ (n\geqq 1)$$

が成り立つので，(1) で証明したこと $(f_4(t)>0)$ が (2) に使えて，証明がすんなり終わります．少しの工夫で，計算量が大きく変わる良い例です．東大や阪大，東工大など，計算量が多い大学を志望する人は，このような問題にも慣れておきましょう．

＜補足：テーラー展開について＞

$f(x)=e^x$ を多項式で近似することを考えてみましょう．つまり

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$$

で，$f(x)$ に“十分近い”ものを考えてみます．完全に一致することはありませんので (証明できますか？)，$x=0$ の近くに限って議論しましょう．

まず，$x=0$ での値が一致するように

$$g(0)=f(0)\iff a_0=1$$

とします．次に，a_1 を決めるために f，g を微分した式の $x=0$ での値が一致するようして

$$g'(0)=f'(0)\iff a_1=1$$

となります．以下同様にして

$$g''(0)=f''(0) \iff a_2=\frac{1}{2}$$

$$g'''(0)=f'''(0) \iff a_3=\frac{1}{6}$$

となり，一般に

$$a_n=\frac{1}{n!} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が得られます．すなわち

$$e^x \fallingdotseq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

となります．完全に一致するわけではなく，誤差がありますが，多項式で近似することができました．

実は $f(x)$ が n 回微分可能であれば

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる c が x と a の間に存在します ($x=a$ のときは，$R_n(a)=0$ です)．これは，平均値の定理の一般化になっています．特に，$f(x)$ が無限回微分可能で，$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ において

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

となる $\varepsilon>0$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**テーラー展開可能である**といい，この展開を $x=a$ での**テーラー展開**といいます. さらに, $a=0$ のときのテーラー展開を**マクローリン展開**といい，有名な関数をマクローリン展開した最初の数項をあげると

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

となります．先ほど上で行った計算と同様にすれば自分で作れますので，計算してみてください．

ちなみに，上の級数は一番下の log の式が $-1<x\leqq 1$ において，他の 3 つは実数全体で成立します．これから，上 2 つの式に $x=\pi$ を，下 2 つの式に $x=1$ を代入すると

$$0=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots\cdots$$
$$-1=1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$
$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

など，面白い関係式を導くことができます（厳密に証明できたわけではありませんが…）．あれこれと“遊んで”みるのも大切だと思います．その経験があった人には，今回出題した問題の誘導の意味が分かったのではないでしょうか．

今回はこのくらいにしたいと思います．夏バテしないように充実した夏休みをお過ごし下さい．

（数学科　川﨑）