強者の戦略

今回の問題は (1) が【1999　大阪大　理系】の入試で出題された問題で，(2) はそれを一般化した問題になっています．

それでは，まず問題を確認しましょう．

> 問題
>
> n を 3 以上の自然数とする．
>
> 一辺の長さが n の正方形の紙の表（おもて）を，一辺の長さが 1 のマス目 n^2 個に区切る．このとき，区切るための線分は元々の正方形の辺に平行にひくものとする．この紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す．A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす．塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を $P(n)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることにする．
>
> (1)　$P(4)$ を求めよ．
>
> (2)　$P(n)$ を求めよ．

続いて，解答に移ります．

（解答）

(1)　正方形の紙は 90° 回転するごとに，四隅を合わせて重ねることができるので，$n=4$ のとき，ある 1 つのマス目は 360° 回転するまでに，自身も含めて 4 個のマス目と重なる．

△	＊	○	△
○	×	×	＊
＊	×	×	○
△	○	＊	△

（上図の同じ印がある 4 個のマス目は，紙を回転すると，互いに重ねることができる）

そこで，回転させたときに重なる 4 個のマス目を 1 つのグループとして考えると，16 個のマス目は 4 つのグループに分けられる．以下，A が塗りつぶす 2 マスの選び方によって場合分けする．

i)　A が 2 つのグループのマス目から 1 個ずつ塗りつぶすとき

B が残りの 2 グループ，つまり $16-(4\times 2)=8$ 個のマス目から 2 つを塗りつぶせば，重ならないので

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot\left({}_4\mathrm{C}_1\right)^2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\frac{14}{75}$$

ii)　A が 1 つのグループのマス目から 2 個塗りつぶすとき

B が残りの 3 グループ，つまり $16-(4\times 1)=12$ 個のマス目から 2 つを塗りつぶせば，重ならないので

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\frac{11}{100}$$

i)，ii) は互いに排反なので，求める確率は

$$P(4)=\frac{14}{75}+\frac{11}{100}=\frac{89}{300}$$

（解答終）

［考察］

夏期講習で扱った問題とは少し異なりますが，

「回転したときに重なるものが，

自身も含めて何個あるかに注目する」

という点が，夏期講習で学んだことと共通していて，活用できるポイントになっています（講習の内容では，元々の図形が正三角形だったり，円順列だったりしたと思います）．この問題では，二人の塗ったマス目が一致しなければよいので，回転したときに重なるものの自身も含めた個数（重複度合い）で割ったりする必要はありませんが，回転したときに重なるものを 1 つのグループとして考える，という点は，円順列と考え方が似ています．

16 個のマス目を 4 つのグループに分けることができれば，後は A が塗ってしまうグループ数で場合分けするだけなので，A が塗りつぶす 2 マスの選び方を丁寧に調べていけば，気づけると思います．

さて，実際の入試問題では，ここまで書ければ満点だったのですが，ここで気になるのが

「nの値を変えたら，どうなるんだろう？」

ということです．

たしかに一般化すると，高校範囲を超えてしまう問題もありますが，$n=5$ とかにするぐらいなら，なんとかなりそうですし，可能ならば n のままで確率を求めてみたいところです．

それに「4という数字に何か意味があるのか？」という点も，なんかこう，気になってきますよね．

そこでまず，$n=5$ に増やしたら，どんなことが起きるんだろう？　と実験してみます．

［実験］

$n=5$ のときマス目の数は25個なので，回転したときに重なる4個のマス目を1つのグループにしていくと，1個余る……？

マス目の数が4の倍数ではないので，回転したときの重複度合いが4回ではないマス目が存在しそうです．ここで思い出して欲しいのが，夏期講習でもお伝えした

「重複度合いは，最大の重複度合いの（正の）約数しかあり得ない」

という知識です．今回は，90°ずつ回転していったとき，4回目に重なるものは必ず自身になる（360°回転したときだから）ので，他の重複度合いとしては，2回か1回しかあり得ません．もし初めて自身と重なるのが3回目であるようなマス目が存在したら，次に自身と重なるのは6回目のときなので，4回目のときに自身と重ならなくなってしまうからです．

なので，25個のマス目の中に，重複度合いが2回か1回のものがないかな，と考えながら，$n=4$ のときと同じように，回転したときに重なるマス目に同じマークを入れてみると……

			＊	
＊		△		
	△	○	△	
		△		＊
	＊			

……回転の中心にある1個のマス目（○印のマス目）は，回転しても他のマス目とは重ならないので，重複度合いが1回になっていることがわかりました．

［考察続き］

次に，回転の中心にマス目があるのはどういうときか，逆に言うと，回転の中心にマス目がないのはどういうときか，を考えてみると

n が奇数のとき，中心にマス目があり

n が偶数のとき，中心にマス目がない

となります．

実験してみることで，n が奇数なのか偶数なのかによって重複度合いが変わってくることがわかりました．この点で「野口さんの第78，79回の問題＆解答から学んだこと」を活かすことができたでしょうか？　あの問題でも，実験をすることで「奇数だからこそうまくいく」ということを感じ取ることができましたよね．

(2) のような問題では，文字定数を利用して一般的に解答を書かないと正解にはなりませんが，解法の糸口をつかむために，「実験してみる」という発想は重要です．

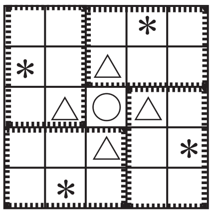
さて，元の話に戻って，n が奇数のとき，中心のマス目以外に特別なマス目があるのかないのか，を考えましょう．

ここで，少し話を一般化して，$n=2k-1$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のときを考えてみると，マス目の個数は

$$(2k-1)^2=4k^2-4k+1=4k(k-1)+1\ (\text{個})$$

あるので，中心以外に特別なマス目がなければ，(1) のときと同じ，4個ずつまとめたグループが $k(k-1)$

個できるはずです．このことを踏まえて考えると，下図のような破線の長方形を 4 つ考えれば，(1) のときと同じように，90° 回転するごとに別の長方形と重なることに気づきやすくなるでしょう．



以上を確認した上で, (2) の解答を作成してみます．1 カ所だけ，不十分なところが残っているので，注意しながら読み進めてみて下さい．

［解答］

(2)　k を 2 以上の自然数とする．

ア）　$n=2k$ のとき

(1) と同様に，回転させたときに重なるものを 1 つのグループとして考えると，$4k^2$ 個のマス目が 4 個ずつ，$k^2\left(=\dfrac{n^2}{4}\right)$個のグループに分けられる．

i)　A が 2 グループから 1 マスずつ塗るとき

B がその 2 グループ以外の (n^2-8) 個のマス目から 2 個塗るとき，重ならないので

$$\frac{{}_{\frac{n^2}{4}}\mathrm{C}_2\cdot\left({}_4\mathrm{C}_1\right)^2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_{n^2-8}\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{(n^2-4)(n^2-8)(n^2-9)}{n^2(n^2-1)^2}$$

ii)　A が 1 グループから 2 マス塗るとき

B がその 1 グループ以外の (n^2-4) 個のマス目から 2 個塗るとき，重ならないので

$$\frac{{}_{\frac{n^2}{4}}\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_{n^2-4}\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{3(n^2-4)(n^2-5)}{n^2(n^2-1)^2}$$

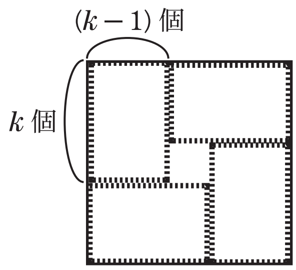
i)，ii) は互いに排反なので，求める確率は

$$P(n)=\frac{(n^2-4)(n^2-8)(n^2-9)}{n^2(n^2-1)^2}+\frac{3(n^2-4)(n^2-5)}{n^2(n^2-1)^2}$$
$$=\frac{(n-2)(n+2)(n^4-12n^2+57)}{n^2(n-1)^2(n+1)^2}$$

イ）　$n=2k-1$ のとき

$4k^2-4k+1$ 個のマス目のうち, 中心の 1 個だけは, 90° 回転しても他のマス目とは重ならない．

他の $4k^2-4k$ 個のマス目は次図のような k 個× $(k-1)$ 個の長方形に注目して考えると，



ア）と同様に 4 個ずつ，$(k^2-k)\left(=\dfrac{n^2-1}{4}\right)$ 個のグループに分けられる．

i)　A が中心と他の 1 個のマス目を塗るとき

B が，中心と A が塗ったマス目と同じグループ以外の (n^2-5) 個のマス目から 2 個塗るとき，重ならないので

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_{n^2-1}\mathrm{C}_1}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_{n^2-5}\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{2(n^2-5)(n^2-6)}{n^4(n^2-1)}$$

ii) A が中心以外の 2 グループから 1 個ずつ塗るとき

B がその 2 グループ以外の (n^2-8) 個のマス目から 2 個塗るとき（※），重ならないので

$$\frac{{}_{\frac{n^2-1}{4}}\mathrm{C}_2\cdot\left({}_4\mathrm{C}_1\right)^2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_{n^2-8}\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{(n^2-5)(n^2-8)(n^2-9)}{n^4(n^2-1)}$$

（※※）

iii)　A が中心以外の 1 グループから 2 個塗るとき

　B がその 1 グループ以外の (n^2-4) 個のマス目から 2 個塗るとき，重ならないので

$$\frac{{}_{\frac{n^2-1}{4}}\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_{n^2-4}\mathrm{C}_2}{{}_{n^2}\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{3(n^2-4)(n^2-5)}{n^4(n^2-1)}$$

i)，ii)，iii) は互いに排反なので，求める確率は

$$P(n)=\frac{2(n^2-5)(n^2-6)}{n^4(n^2-1)}$$

$$+\frac{(n^2-5)(n^2-8)(n^2-9)}{n^4(n^2-1)}+\frac{3(n^2-4)(n^2-5)}{n^4(n^2-1)}$$

$$=\frac{(n^2-5)(n^4-12n^2+48)}{n^4(n-1)(n+1)}$$

（解答終）

　さて，以上でほぼ完答なのですが，最後に詰めが甘いところをなくしておきましょう．

　さきほどは，実験として $n=5$ としてみましたが，逆に n を小さくして $n=3$ とすると，何が起きるでしょうか？　もちろん n が奇数のときなので，A が中心を塗るか塗らないかで場合分けをするのですが……A が中心を塗らず，かつ，他の 2 グループから 1 個ずつ塗るとき（解答のイ）の ii) のとき)，B が塗ることのできる場所が中心だけ，になってしまい 2 マス塗ることができません．

　このことは解答の（※）直前の

　「(n^2-8) 個のマス目から 2 個塗るとき」

という文章に $n=3$ を代入するとおかしいことからも気づけるでしょう．

　以上のことより，$n=3$ のときのみ，さらなる場合分けをしないといけないので，解答の（※）と（※※）に次の文章を挿入することで，完答となります．

[（※）に挿入]

　（ただし，n が 5 以上の奇数のとき）

[（※※）に挿入]

　$n=3$ のとき，A が塗った場所と重ならないように B が塗ることのできるマス目は，中心のマス目 1 個だけなので，重ならない確率は 0 であるが，これは先に求めた式に $n=3$ を代入した結果と一致する．

　ようやく，完璧な解答に仕上げることができました！　場合の数・確率の単元では「ある試行に対し，起こりうるすべての事象をイメージすることのできる力」つまり，未来のことがらを思い描いた後，細部まで分析する力が必要になります．最初の偶奇分けはもちろんのことですが，$n=3$ のときの例外も見抜けるぐらいに，少しずつ分析力を高めていきましょう．必ず，入試本番では強い武器になってくれるはずです．

（数学科　中西）