

強者の戦略

道具として何を選択して、何をすればよいのかわかりましたか？大きな岩がなくなってしまっても“それを用いずに”宝のありかを示すことができればいいのです。ベクトルと回転が頭に浮かべば合格です。

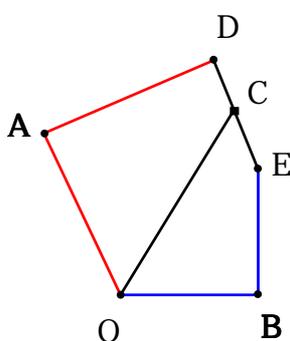
数学第3問 (III C)

ヨシヒロ少年は自宅の倉庫から宝物のありかを示す地図を見つけた。しかし、宝物の埋めである正確な場所は分からず、ヒントが書いてある紙面がある。紙面には

「草原に銀杏の木と楓の木が寂しく立っており、そして大きな岩がある。大きな岩から銀杏の木に向かって歩数を数えながら歩け。銀杏の木についたら、そこから右に 90° 向きを変え、さらに同じ歩数だけ歩きそこに目印を置け。また、大きな岩から楓の木に向かって歩数を数えながら歩け。楓の木についたら、そこから左へ 90° 向きを変え、さらに同じ歩数だけ歩き、そこにも目印を置け。2つの目印の中間地点に宝が埋めてある。」

と書いてあった。さて、ヨシヒロ少年が友人のあなたと地図の示す草原に来たところ、大きな岩は撤去されており跡形もなかった。ヨシヒロ少年は宝探しを諦めようとしているが、あなたにヨシヒロ少年のために宝のありかをつきとめてもらいたい。

まずは簡単な概形を考えてみましょう。大きな岩を O 、銀杏の木を A 、楓の木を B 、宝の埋めてある場所を C とします。また銀杏の木から進んだときの目印、楓の木から進んだときの目印をそれぞれ、 D 、 E とします。今回は大きな岩がなくなっているので O を始点にすることはできません。



ですから、**A** か **B** を始点にした位置ベクトルを考えてみます。
(宝を探すのに使えるのは A 、 B のみであることに注意！)

《解答》

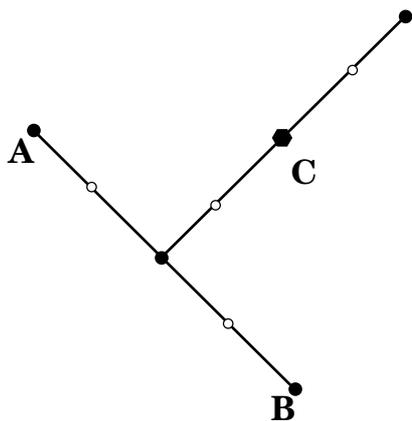
A を始点とする位置ベクトルを考える。また f を反時計回りに 90° 回転させる 1 次変換とすれば

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= f(\vec{AO}) \\ \vec{AE} &= \vec{AB} + f^{-1}(\vec{BO}) \\ &= \vec{AB} + f^{-1}(\vec{AO} - \vec{AB})\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE} \\ &= \frac{1}{2}f(\vec{AO}) + \frac{1}{2}\left[\vec{AB} + f^{-1}(\vec{AO} - \vec{AB})\right] \\ &= \frac{1}{2}f(\vec{AO}) + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}f(\vec{AO} - \vec{AB}) \quad \left\{ \because f^{-1}(\vec{OX}) = -f(\vec{OX}) \right\} \\ &= \frac{1}{2}f(\vec{AO}) + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}f(\vec{AO}) + \frac{1}{2}f(\vec{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}f(\vec{AB})\end{aligned}$$

であるから、宝の埋めてある位置は以下のようなになる。



～あとがき～

いかかでしたでしょうか？この問題の最大のポイントは O（大きな岩）をいかに消去するかということですが、反時計回りに 90° 、時計回りに 90° 回転させることが、結局向きが逆になるだけであること ($f^{-1} = -f$) を利用すれば、意外に難しくありません。・・・というかこの設定がないと宝を探し出すのは無理ですね・・・