強者の戦略

今回の問題は(1)が【2006　名古屋大　理学部　後期】の入試で出題された問題です．(2)は「何か別の切り口で類題を作れないか？」と私がうねうねと考えながら捻り出した問題です．

それでは，まず問題の確認から．

問題

「n が5以上の奇数のとき，正 n 角形の対角線は，頂点以外では3つの対角線が1点で交わることはない」

ということを証明なしに用いてよいものとする．以下の各問いに答えよ．

(1)　正五角形の頂点A，B，C，D，Eを結んだ5本の対角線を考えると，交点が5個できる．この5個の交点P，Q，R，S，Tの上に，表裏が定まったコインが置かれ固定されているとする．

今，表裏が定まっていて互いに区別のつかない5枚のコインを新たに用意し，5個の頂点上に1枚ずつ置く．すると,各対角線上には4枚のコインが並ぶことになる．このとき，どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような，5個の頂点へのコインの置き方の場合の数は何通りあるか．考察の過程を丁寧に説明して解答せよ．

(2)　n を5以上の奇数とする．正 n 角形の頂点 A_1，A_2，……，A_n を結んだ対角線をすべて考え，正 n 角形の内部にできた交点すべてに表のコインを置き固定する．

今，表裏が定まっていて互いに区別のつかない n 枚のコインを新たに用意し，n 個の頂点上に1枚ずつ置く．このとき，どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような，n 個の頂点へのコインの置き方の場合の数は何通りあるか．考察の過程を丁寧に説明して解答せよ．

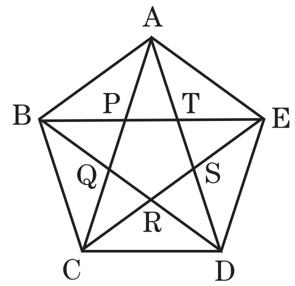
問題文が若干長いので，慣れていない人は条件を把握するのに時間がかかったかもしれません．ただ,浜松医科大や，滋賀医科大などでは，これ以上に長い問題文の出題もあり，どちらも「短時間で必要な情報を判別し，自分の言葉で説明，もしくは，計算して結果を得ることができるか」という力を問うていると考えられます．よって，医学部系を目指す強者は特に，今回のような出題形式にも慣れていってもらいたいと思います．

それでは,解答です．【※】と【※※】の部分には,後ろに考察があります．

［解答］

（カッコ内の文章は，理解の助けのために書いてあるものなので，試験では省略してよい。）

(1)　頂点と交点の名前が，図のように並んでいるとしても一般性を失わない．



まずAに,コインを表でも裏でもよいので置く．すると

対角線APQC　……①

の上に表のコインが偶数個となるような，Cにおくコインの表裏が（【※】P，Qにあるコインの表裏がどう固定されていても，それに対して）1通りに決まる．同様に

対角線CRSE　……②

対角線ETPB　……③

対角線BQRD　……④

を考えると，E，B，Dに置くコインの表裏が（対角線の交点上にあるコインの表裏がどう固定されていても，それぞれに対して）1通りに決まる．【※ここまで】

このとき，①，②，③，④の4本の対角線の上にある表のコインの数をそれぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 で表すと，これらはすべて偶数であり（4本の対角線上の点に，B，C，E，P，Q，Rは2回ずつ，D，S，T，Aは1回ずつ登場するので）

【※※】

$a_1+a_2+a_3+a_4$

$=2\times$(B，C，E，P，Q，R上の表のコインの数)

$+$(D，S，T，A上の表のコインの数)

となるので，残りの対角線 DSTA 上の表のコインも偶数個となる．

【※※ここまで】

以上より，最初に A に置くコインが表でも裏でも，題意を満たすような頂点へのコインの置き方は 1 通りに決まる．

ゆえに，求める場合の数は，2 通り．

［考察］

・【※】について

まず (1) で難しいのは

「対角線上に置いてあるコインが表か裏か決まっていない」

という点です．交点は 5 個しかないので，表裏の場合分けをすべて考えても，$2^5 = 32$ 通りしかありませんが，さすがにすべて考察するのは面倒です．

そこで，まずは

「見慣れない問題は，実験してみる」

「全体で見て難しいときは，一部を抜き出す」

に従って，いろいろ試してみましょう．すると……

（例）　対角線 APQC において

i)　P，Q のコインが表，裏，1 枚ずつ

A に表を置いたら，C は裏

A に裏を置いたら，C は表

ii)　P，Q のコインが共に表か共に裏

A に表を置いたら，C は表

A に裏を置いたら，C は裏

以上のようになりました．これは，どの対角線でも言えることなので，一方の頂点のコインの表裏を決めると，対角線上のコインの表裏がどうなっていても，もう一方の頂点のコインの表裏は 1 通りに決まる（1 通りに決まるだけで，対角線上のコインに表裏は左右される），ということがわかります．

このことを使えば，5 本中 4 本目の対角線までは，条件をみたすように頂点にコインを置けそうです．特に今回は対角線が星形になるので，一筆書きの要領で順に頂点を追いかけていくと，各頂点のコインの表裏が決まっていく過程がわかりやすいと思います．

・【※※】について

さて【※】を使えば，4 本目の対角線まではうまくできそうなのですが，最後の 5 本目の対角線を考えたとき，最後の頂点が最初の頂点と一致するため，【※】のときのように，コインの表裏を自由に決めることができません．ですので，最後の対角線だけは別の方法で，表のコインが偶数個になっているのかどうか確かめなくてはなりません．そこで今度は

「（図形の）一部だけ見てわからないときは，（図形の）全体を見る」

を利用して，【※】で考えた 4 本の対角線をまとめて考えると

1．全部で表のコインは偶数回数えている

2．5 本目の対角線上にない頂点・交点は，① から ④ の対角線の名前に 2 回ずつ登場している

3．5 本目の対角線上にある頂点・交点は，① から ④ の対角線の名前に 1 回ずつしか登場していない．

以上 3 点のうち，１と２は「偶数になるもの」ですから，，解答にあるように，３も「偶数になるもの」であると示すことができるのです．

［考察ここまで］

次に，(2) の解答です．(1) と同じく【※】と【※※】の部分には，後で考察があります．

［解答］

(2)　条件より，正 n 角形の内部にある対角線の交点には，すべて表のコインが置かれているので，任意の対角線の両端の頂点におくコインは，その対角線上にあるコインの枚数によって

奇数個のとき：表，裏，1 枚ずつ

偶数個のとき：共に表　か　共に裏

と決まる．

強者の戦略

【※】以下，ある対角線上にあるコインの個数の偶奇を考える．ある対角線を選べば，その両端でない頂点の個数は $(n-2)$ 個であり，n が奇数より，$(n-2)$ も奇数となる．この奇数個の頂点が，選んだ対角線から見て，一方の側ともう一方の側に

「奇数個と偶数個」または「偶数個と奇数個」

と分かれるので，選んだ対角線から見て，一方の側からもう一方の側に対角線を引くと

「奇数個の頂点から偶数本ずつ対角線が伸びる」

かまたは

「偶数個の頂点から奇数本ずつ対角線が伸びる」

のいずれかになる．よって，最初に選んだ対角線上には，他の対角線との交点が，必ず偶数個できる．
【※ここまで】

以上より，任意の対角線上には，表のコインが偶数枚置かれているので，両端の頂点におくコインは

共に表　か　共に裏　……①

が必要である．

次に，頂点 A_1 から順に，反時計回りに見て 2 つ先の頂点に向けて対角線 A_1A_3，A_3A_5，A_5A_7，……を順に引いていくと（もし頂点が，番号順に並んでいない場合も，同じように 2 つ先の頂点と対角線を結んでいく)，【※※】奇数と 2 が互いに素であることから，n 本の対角線を引く間に，すべての頂点を 1 回ずつ通り，最後に A_1 に戻る．【※※ここまで】

よって，（最後に引く対角線は $A_{n-1}A_1$ であるが，この一つ手前の）対角線 $A_{n-3}A_{n-1}$ までの $(n-1)$ 本の対角線において，両端の頂点におくコインの表裏を考えると，① より

すべての頂点に表のコインを置く

すべての頂点に裏のコインを置く

のいずれかが必要で，逆にこのとき，任意の対角線上にある表のコインは偶数個となるので十分である．

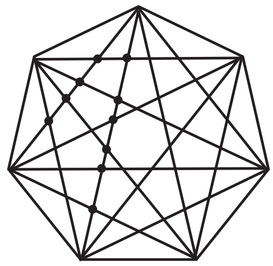
ゆえに，求める場合の数は，2 通り．

[考察]

・【※】について

(2) は (1) とは異なり，対角線上の交点には，すべて表のコインが置かれているので，その枚数の偶奇さえわかれば，両端の頂点に置くべきコインの表裏が決まります．

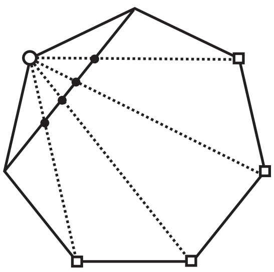
そこで，(1) とは少し違った実験をしてみましょう．(1) の解答の図より，正五角形においては，任意の対角線上の交点は 2 個ずつ，つまり偶数個ずつになっています．これは，他の正奇数角形ではどうなっているのでしょうか？　正七角形でやってみると……



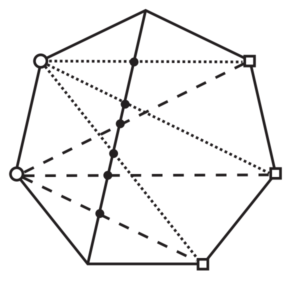
……4 個のとき，6 個のときと，個数に違いはあれど，任意の対角線上には偶数個ずつの交点がありますね．正九角形などでも試してみると，他の正奇数多角形でも偶数個ずつになります．

「予想したら『文字定数で説明』か
『数学的帰納法』で一般化」

したいので，先の正七角形において，交点の個数が 4 個や 6 個に決まる仕組みを考えてみると……



[奇数個の○から，偶数個の□に引くとき]



[偶数個の○から奇数個の□に引くとき]

……と，このように，選んだ対角線から見て，一方の側ともう一方の側に，対角線の両端ではない頂点が，「奇数個と偶数個」または「偶数個と奇数個」に分かれているから，必ずある対角線上の交点の個数は偶数個になる，というわけなのです．ここまで分かれば，後はこれを一般的に文字定数で説明すればＯＫです．

・【※※】について

【※】より，ある対角線を選べば，両端の頂点に置くコインの表裏が

共に表　か　共に裏

のいずれかになることまではわかったのですが，どちらを選べばいいのでしょうか？　全部表とか全部裏なら，たしかにうまくいきそうですが，「共に表」と「共に裏」が混ざっていてもうまくいくような，上手な置き方があるかもしれませんので考察が必要です．

ここで思い出して欲しいのが (1) で，(1) は対角線が星形で，一筆書きですべての頂点を通ることができたため，（必要条件ではありましたが）最後の 5 個目の頂点まで，順にコインの裏表を決めていくことができました．今回も（すべての対角線を一筆書きするのは無理としても）対角線を引いていくことで，すべての頂点を 1 回ずつ通るようにできれば，順に頂点におくコインの表裏を決めていけるはずです．

ここで注目したいのが，今回は頂点の個数，つまり n が奇数であり，2 となら必ず互いに素になれる，という性質です．

ある頂点 A_1 から初めて，反時計回りに，A_1 の隣の頂点 A_2 から順に 1 つずつ数えていったとき，再び頂点 A_1 が現れるのは，n 個目，$2n$ 個目，$3n$ 個目……というように，n の倍数個だけ数えたときになりますが，これをすぐ隣ではなく，A_3，A_5，A_7…・というように，2 個先の頂点を数えていったとすると，次に A_1 を数えることになるのは，n と 2 が互いに素であることから（n 個先の頂点は数えずに飛ばすことになるので）$2n$ 個目のときになります．

この $2n$ 個目に到達するまでに，n 個の頂点を通っていて，しかも，その途中の頂点も $2n$ 個先に進むまでは同じ頂点にはならないはずなので，すべて異なる頂点を通っていることになります．

よって，今いる頂点からみて 2 個先の頂点と対角線を結んでいけば，すべての頂点を 1 回ずつ通りながら，各頂点に置くコインの表裏を順に決めていけるわけです．

[考察ここまで]

（余談）

この問題で証明なしに用いてよい，とした「n が奇数のとき，正 n 角形の 3 本の対角線が 1 点で交わることはない」という命題は 1963 年に証明されているとのこと．また「n が素数のとき」に条件を変えると，少し易しくなり 1962 年に証明されています．「n が素数のとき」の証明は『複素数平面』の知識と，根気よく場合分けする能力があれば読むことができると思いますので，興味のある強者はチャレンジしてみてはどうでしょうか．

（数学科　中西）