強者の戦略

強者の皆さん，そして，強者にならんとしている意欲のある皆さん，こんにちは．数学科の中西です．

ついに，数学科からの出題＆解答解説は 100 回目を迎えることとなりました！

栄えある 100 回目の記事を担当できるとは……今年の中西はかなり運が巡ってきているようです．

というわけで，この記事を見た受験生の皆さんも，きっと幸運です（断言）．それを活用して入試本番では最高のパフォーマンスを発揮してきてくださいね！

さて，今回の問題は中西第 1 回と同様に「小さい頃になんとなく気になっていた疑問を解決してくれる問題」を用意しました．私は中学時代テニス部だったのですが, テニスには「タイブレーク」というルールがあります．簡単に言うと, 同点になったら先に 2 点差をつけたほうを勝ちとする, というルールです．これを知ったとき「ってことは，永遠に続く可能性があるわけか．いつまで経っても勝負がつかへんかったら，どうするんやろう？」と子供心に疑問を抱いていました．そんな疑問に 1 つの答えを与えてくれるのが，以下の問題です．

問題

A，B 2 人の間で試合をくり返し，先に 3 回勝った者が優勝者となる．A，B それぞれが勝つ確率 p，q はつねに一定で，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$ とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1)　A が優勝する確率を V_{A} とする．$\dfrac{V_{\mathrm{A}}}{p}$ が最大となる p を求めよ．

(2)　$p=q$ のとき，優勝者が決まるまでの試合数 X の期待値を求めよ．

(3)　2 勝 2 敗になったとき，その後の試合において先に 2 回多く勝った者が優勝者となるようにルールを変更する．このようにルールを変更したとき，優勝者が決まるまでの試合数を Y とする．$p=q$ のとき

$$\sum_{i=3}^{n} iP(Y=i)$$

を求めよ．ただし，$P(Y=i)$ は i 回目の試合で優勝者が決まる確率を表す．

理系の方は，是非 (3) の式を

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=3}^{n} iP(Y=i)$$

に変更して解いてみて下さい．文系の方でも (3) が解ければ，期待値が大体どのぐらいの試合数になるのかは，イメージできると思います．

それでは，解答編でお待ちしています．