強者の戦略

今回の問題は(1)が【1996　名古屋市立大　医学部】の入試で出題された問題でした．私は東海地方出身なので，その地方の入試問題に惹かれがちなのかもしれません（笑）

それでは，まず問題の確認から．

> 問題
>
> A，B 2 人の間で試合をくり返し，先に 3 回勝った者が優勝者となる．A，B それぞれが勝つ確率 p，q はつねに一定で，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$ とする．このとき次の各問いに答えよ．
>
> (1)　A が優勝する確率を V_A とする．$\dfrac{V_A}{p}$ が最大となる p を求めよ．
>
> (2)　$p=q$ のとき，優勝者が決まるまでの試合数 X の期待値を求めよ．
>
> (3)　2 勝 2 敗になったとき，その後の試合において先に 2 回多く勝った者が優勝者となるようにルールを変更する．このようにルールを変更したとき，優勝者が決まるまでの試合数を Y とする．$p=q$ のとき
>
> $$\sum_{i=3}^{n} iP(Y=i)$$
>
> を求めよ．ただし，$P(Y=i)$ は i 回目の試合で優勝者が決まる確率を表す．

(1)，(2) がそれなりに (3) への誘導になっているので問題を削らずに出題しましたが，強者たらんとしている皆さんであれば，(3) のみでも答えまでたどり着けるのではないか，と思います．

それでは，解答に移りましょう．

［解答］

(1)　A が優勝するのは

- A が 3 試合連続で勝つ
- 3 試合目までに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 試合目に A が勝つ
- 4 試合目までに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 試合目に A が勝つ

の 3 パターンがあり，これらは互いに排反なので

$$V_a = p^3 + {}_3\mathrm{C}_1 p^2(1-p)p + {}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2 p \quad \cdots\cdots ①$$

$$= 10p^3 - 15p^4 + 6p^5$$

$$\therefore\ \frac{V_A}{p} = 6p^4 - 15p^3 + 10p^2$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{V_A}{p}\right) = 24p^3 - 45p^2 + 20p$$

$$= p(24p^2 - 45p + 20)$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{V_A}{p}\right) = 0 \iff p = 0,\ \frac{45 \pm \sqrt{105}}{48}$$

ここで

$$10 < \sqrt{105} < 11$$

より

$$0 < \frac{45-\sqrt{105}}{48} < 1 < \frac{45+\sqrt{105}}{48}$$

であるから，増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{45-\sqrt{105}}{48}$	$\cdots$	1
$\frac{d}{dp}\left(\frac{V_a}{p}\right)$		$+$	0	$-$	
$\frac{V_a}{p}$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\dfrac{V_A}{p}$ が最大となる p の値は

$$p = \frac{45-\sqrt{105}}{48}$$

である．

(2)　$p+q=1$ より，$p=q$ のとき

$$p = q = \frac{1}{2}$$

である．このとき，A が優勝するときと B が優勝するときがあることに注意しながら，(1) の ① を利用して，求める期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2 + 4\cdot {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2 + 5\cdot {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 2$$

$$= \frac{33}{8}$$

である．

(3)　以下

$$P(Y=i) = a_i \quad (i=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

と表記することにする．まず

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

である．

次に，4 試合目以降で優勝者が決まるときを考える．優勝者の勝数が x（x は 3 以上の自然数）のとき，相手の勝数は $x-2$ となるので，総試合数は $2x-2$，つまり偶数回目の試合のときに優勝者が決まる．よって

$$a_i=0 \quad (i \text{ は } 5 \text{ 以上の奇数})$$

である．

ここで

$$a_4={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2=\frac{3}{8} \quad \cdots\cdots②$$

であり，$(2l+2)$ 試合目 $(l=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で優勝者が決まるときを考えると，$2l$ 回目までに優勝者が決まらず，最後の 2 試合で A，B のいずれかが 2 試合続けて勝つときなので

$$a_{2l+2}=\left(1-\sum_{i=3}^{2l}a_i\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2$$

$$\iff 2a_{2l+2}=1-\sum_{i=3}^{2l}a_i \quad (l=2,\ 3,\ 4\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots③$$

$$\therefore\ 2a_{2l}=1-\sum_{i=3}^{2l-2}a_i \quad (l=3,\ 4,\ 5\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots④$$

となる．$l \geqq 3$ のとき，③－④ より

$$2a_{2l+2}-2a_{2l}=-a_{2l}-a_{2l-1}$$

であり，$a_{2l-1}=0$ より

$$a_{2(l+1)}=\frac{1}{2}a_{2l} \quad (l=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots⑤$$

となる．加えて

$$a_6={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2=\frac{3}{16}$$

であるから，⑤ は $l=2$ のときも成立する．よって ② より

$$a_{2l}=a_4\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2} \quad (l=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

である．以上より

i) $n=2l$ $(l=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{n}iP(Y=i)&=3a_3+\sum_{k=2}^{l}2k\cdot a_{2k}\\&=3\cdot\frac{1}{4}+\sum_{k=2}^{l}2k\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\\&=\frac{3}{4}+3\sum_{k=2}^{l}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

である，ここで

$$T_l=\sum_{k=2}^{l}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

とおくと

$$\begin{aligned}T_l&=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^l\\-)\ \frac{1}{2}T_l&=\qquad 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(l-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^l+l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T_l&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^l-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}\right\}-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\\&=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^l-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\\T_l&=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^l\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{n}iP(Y=i)&=\frac{3}{4}+3T_l\\&=\frac{3}{4}+3\left\{\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-l\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\}\\&=\frac{21}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-3\cdot\frac{l}{2^l}\end{aligned}$$

である．

ii) $n=2l+1$ $(l=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ のとき

$a_{2l+1}=0$ ゆえ，i) より

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{n}iP(Y=i)&=\sum_{i=3}^{2l+1}ia_i=\sum_{i=3}^{2l}ia_i+(2l+1)\cdot 0\\&=\frac{21}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-3\cdot\frac{l}{2^l}\end{aligned}$$

である．これは，$n=3$ つまり $l=1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{3}iP(Y=i)&=\frac{21}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}-3\cdot\frac{1}{2^1}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

となり，$3a_3$ と一致するので，$l=1$ つまり $n=3$ のときも成立する．

以上より，求める期待値は

n が偶数のときは　$n=2l$ $(l=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

強者の戦略

n が奇数のときは　$n=2l+1\,(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

とおけば，ともに

$$\sum_{i=3}^{n} iP(Y=i)=\frac{21}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-3\cdot\frac{l}{2^l}$$

となる．

［考察］

残念ながら，文系の範囲内では，ここまでが限界なのですが，理系の範囲である数学 III の「数列の極限」を用いれば，n が限りなく大きくなったとき，この期待値がどのような状態に限りなく近づいていくか，を考えることが可能です！　その部分を，以下の（補足）に示します．

（補足）

n が偶数，奇数，いずれの場合でも，先の解答のように l を用いておくならば

$$n\to\infty \quad \text{のとき} \quad l\to\infty$$

である．さらに，どちらも部分和は同じ式になる．

ここで，n が十分大きいとき，つまり，l が十分大きいとき，二項定理より

$$\begin{aligned}2^l&=(1+1)^l\\&=\sum_{k=0}^{l}{}_l\mathrm{C}_k\\&\geqq {}_l\mathrm{C}_2=\frac{l(l-1)}{2}\end{aligned}$$

であるから，両辺正より逆数をとって

$$0<\frac{1}{2^l}\leqq\frac{2}{l(l-1)} \iff 0<\frac{l}{2^l}\leqq\frac{2}{l-1}$$

となる．ここで

$$\lim_{l\to\infty}\frac{2}{l-1}=0$$

ゆえ，はさみうちの原理より

$$\lim_{l\to\infty}\frac{l}{2^l}=0$$

である．

以上より

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=3}^{n} iP(Y=i)\\&=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{21}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}-3\cdot\frac{l}{2^l}\right\}\\&=\frac{21}{4}\end{aligned}$$

である．

（補足ここまで）

以上の計算から

「いつまででも続く可能性はある」

けれど，2 人の力が互角であれば

「期待値的には

5 試合ちょっとぐらいで決着がつく」

ということがわかりました！

テニスのルールを初めに考えた人は，このことを経験則から感じ取っていたのかもしれませんが，実際に計算してみると，それほど無茶ではないバランスのとれたルールであることが，目に見えて実感できるのではないかと思います．

（数学科　中西）