強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（Ⅲ C）

n を正の整数とする．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

によって定める．

(1)　a_2 および a_3 を求めよ．

(2)　一般項 a_k を求めよ．

(3)　$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ．

(1)

$$a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad\cdots\cdots(*)$$

において，$k=1$ として

$$\begin{aligned}a_2&=-\frac{1}{n+2}+n\cdot a_1\\&=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

である．さらに，$k=2$ として

$$\begin{aligned}a_3&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}(a_1+a_2)\\&=-\frac{1}{n+3}\\&\qquad+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}\\&=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

である．

(2)

$$a_k=\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$k=1$ のとき

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)}$$

より成立する．

(ii)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l$（$l$ はある自然数）のとき，成立すると仮定する．

このとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned}a_{l+1}&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i\\&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}\\&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\\&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)\\&=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}\\&=\frac{1}{(n+l)(n+l+1)}\end{aligned}$$

であるから，$n=l+1$ のときも成立する．

以上，(i)，(ii) よりすべての自然数 k で

$$a_k=\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

である．

(3)　(2) より

$$\frac{1}{(n+k)^2}<a_k<\frac{1}{(n+k-1)^2}$$

であり，各辺正なので

$$\frac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\frac{1}{n+k-1}$$

が成立する．これを，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ で足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$$

である．

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\&=\left[\log(1+x)\right]_0^1\\&=\log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)\\&=\log 2+0-0\\&=\log 2\end{aligned}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\\&=\log 2\end{aligned}$$

である．

□

＜コメント＞

数学科の川崎です．今年度もどうぞよろしくお願いします．今回は数列の極限の問題を出してみました．難易度的には,「標準」という言葉がぴったりの，適度に差のつく問題だと思います．(3) の不等式の評価に慣れていない人は練習してください．

小問ごとに補足していきます．まず (1) ですが，これは単なる計算問題です．与えられた関係式 $(*)$ で，n が定数であることに注意してください．答えに n が残ってかまいません (a_1 も n で表されていますね)．k に 1，2 を代入して計算してください．

(2) は, $(*)$ が a_{k+1} と S_k (初項から第 k 項までの和) の関係式になっていて

$$S_k-S_{k-1}=a_k\ (k\geqq 2)$$

を使って S_k を消去するのがよくあるパターンです．しかし，この問題ではシグマの前の分数の分母が k と $k-1$ でずれてしまい，差をとっても S_k が消えずうまくいきません．そこで，別の方針で考えましょう．(1) があるので一般項 a_k を予想できると思います．そして漸化式 $(*)$ があるので**数学的帰納法の利用**を思いつきたいところです．(1) がなくても，漸化式が解けないと思ったら，最初の数項を求めてみて，予想して帰納法で示せないかを考えてください．当たり前ですが予想するだけではほとんど点数は与えられませんので証明が必要です．この問題では，$a_1\sim a_l$ が求まれば $(*)$ から a_{l+1} が求まるので，$a_1\sim a_l$ を仮定する必要があります．私は「**前全部を仮定する帰納法**」と呼んでいますが，このような特殊な帰納法にも慣れてください．漸化式の形から何を仮定すべきか判断できるようにしましょう．

勝負は (3) です．

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$

の極限を計算します．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n+k+1}}$$ なら有理化で

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$$ なら部分分数分解で

それぞれ差の形を作って和を計算することができますが，この問題の和は計算することができません．したがって

「**不等式を作ってはさみうち**」，「**区分求積法**」

などを考えなくてはいけません．区分求積法とは，$f(x)$ を連続関数として

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

として無限級数を計算する方法です (数Ⅲの積分が未習の人は，(3) が解けなかったと思いますが，習ってから（もしくは自分で勉強してから）もう一度挑戦してください)．本問でいきなり区分求積法を使おうとするのは

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}}\end{aligned}$$

となり，シグマの中に $\frac{1}{n}$ が残ってしまうので失敗します．したがって，この $\frac{1}{n}$ が出ないように先に不等

式で評価をすることになります．解答にある不等式の作り方は，一般化すると

$$0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n$$

に対して

$$\frac{1}{a_n^n}\leqq\frac{1}{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\leqq\frac{1}{a_1^n}$$

とするものです．「最も大きいもの，最も小さいものにすべてを置き換える」というよく使う手法ですので，しっかり身につけてください．難関大学の入試問題では，これくらいは自分で作ることが要求されます．同様にして

$$\frac{n}{a_n}\leqq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\leqq\frac{n}{a_1}\quad\cdots\cdots(\#)$$

も作れますね．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ の形なら区分求積法でうまくいきます

(ここでも (#) を使って

$$\frac{n}{n+n}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqq\frac{n}{n+1}$$

と不等式を作ることができますが，これは右辺と左辺の極限が異なるので失敗です．極限値として log 2 が出てこなくてはいけないので，この方針では苦しいと気づきましょう)．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$ で区分求積法を使うと，上と同様に $\dfrac{1}{n}$ が残ってしまいますが，この和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ の最初と最後がずれただけなので極限は求まります．これで，はさみうちの完成です．

使う道具は限られていますが，それを使えるか使えないかあれこれと考えなくてはいけません．この「考える，やってみる」という作業を怠ると数学はできるようにはなりませんので，頑張りましょう．

話はそれますが

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$$

です．これは

$$\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

が成り立つ（面積評価で簡単に証明できます）ことから分かります．ところが，分母が n ずれた

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

は log 2 に収束するというのは面白いですね．実は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

と変形できます．この等式が成立することを帰納法で示せという問題が，大阪大学で 2005 年に出題されていますが，帰納法を使わなくても

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\\&\quad-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\\&\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

として示せます．つまり，＋と－が交互に出てくる級数 (交代級数といいます) を変形したものなので，収束する可能性は単に＋のものより高くなります．

最後に，不等式で級数を評価する練習問題をつけておきます．不等式をどう作るか，考えてみてください．

強者の戦略

問題

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}},\quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

とするとき

$$\lim_{n\to\infty}a_n,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$$

を求めよ．

（1990　東京大学　理科・前期）

（解答）

$$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

であるから

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

である．

次に

$$\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k}}$$
$$\iff\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

であるから，これを $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ で足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$\iff\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$\iff\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n\sqrt{n+1}}\right)<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(\because\ a_n>0)$

である．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．

（解答終わり）

a_n の不等式評価は，先ほどの

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\log n$$

を用いても良いでしょう．b_n を a_n でどう評価するかが頭を使いますね．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに．

（数学科　川崎）