強者の戦略

今回の問題は【2012　お茶の水女子大　理学部　後期】の入試で出題された問題です．この大学は女性しか入学することができない国公立大学なので，男性諸君は赤本などを見たことがないかもしれませんが，毎年，歯ごたえのある数学の入試問題を出題してくれている大学です．

それでは，まず問題の確認からいってみましょう．

> 問題
>
> 赤青黄の 3 個のサイコロを一度に振って出た目の数を赤青黄の順に百の位，十の位，一の位として数を作ることにする．
>
> (1)　出来た数が 5 の倍数になる確率を求めよ．
>
> (2)　出来た数が 6 の倍数になる確率を求めよ．
>
> (3)　n を自然数とする．A さん, B さんがサイコロを振り，A さんは出来た数が 6 の倍数の場合に当たりとし，B さんは出来た数が 5 の倍数の場合に当たりとする．いま A さん，B さんの順にサイコロを振っていき，どちらかが当たりを出したらそこで終了することにする．ただし，A さん，B さんがそれぞれ n 回ずつ振っても当たりが出なかった場合はその時点で引き分けとし終了する．A さんと B さんのどちらが当たりを出す確率が高いか答えよ．
>
> (4)　(3) において，A さんの当たりを，出来た数が 7 の倍数の場合に変えると，A さんと B さんのどちらが当たりを出す確率が高いか答えよ．

(1) は楽勝ですが，格好良く解こうとしたときに，(2) で手が止まった人もいるかもしれません．もちろん，全事象が高々 216 通りなので，格好良く解けなくても気合いで数え上げて答案を書くべきです．ですが，強者を目指す皆さんの場合，それでは気持ち悪さが残ると思うので，解答では合同式の考え方を使って説明してみます．それでは，解答です．

［解答］

赤青黄のサイコロを振って出た目を順に，a，b，c とし，$X=100a+10b+c$ とおく．

(1)　X が 5 の倍数になるのは，$c=5$ のときなので，その確率は

$$1\cdot1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

である．

(2)　X が 6 の倍数になるのは，X が 2 の倍数，かつ，3 の倍数になるとき，つまり

　$c=2$，4，6　かつ　$a+b+c$ が 3 の倍数【※】

となるときである．以下, 3 を法とする合同式を考え，たとえば

「a を 3 で割った余りが 1 である確率」

を $P(a\equiv1)$ と書くことにする．このとき

$$\begin{aligned}P(a+b\equiv1)&=P(a\equiv0)\cdot P(b\equiv1)\\&\quad+P(a\equiv1)\cdot P(b\equiv3)\\&\quad+P(a\equiv2)\cdot P(b\equiv2)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}P(a+b\equiv2)&=P(a\equiv0)\cdot P(b\equiv2)\\&\quad+P(a\equiv1)\cdot P(b\equiv1)\\&\quad+P(a\equiv2)\cdot P(b\equiv0)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であるから，余事象を考えて

$$\begin{aligned}P(a+b\equiv0)&=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

である．よって，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(c=2)\cdot P(a+b\equiv1)\\&+P(c=4)\cdot P(a+b\equiv2)\\&+P(c=6)\cdot P(a+b\equiv0)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

である．

【※】の補足

$$X=100a+10b+c$$
$$=3(33a+3b)+(a+b+c)$$

であり，$33a+3b$ が整数なので，$a+b+c$ が 3 の倍数なら，X も 3 の倍数となる．

《合同式について》

整数 a，b を自然数 n で割ったときの剰余が等しいとき

$$a\equiv b \pmod n$$

と表し，この式のことを合同式という．(ただし，負の整数 a に対しては，q，r を整数として

$$a=qn+r \quad (0\leqq r<n)$$

を満たす r を剰余とする．)

合同式においては

$$a\equiv b \pmod n \quad と \quad c\equiv d \pmod n$$

がともに成り立つとき

加減法：$a\pm c\equiv b\pm d \pmod n$

乗法：$ac\equiv bd \pmod n$

が成り立つ．

これを用いれば，先の【(※) の補足】は

$$X=100a+10b+c\equiv a+b+c \pmod 3$$

とも表すことができる．

(3)　A が当たりを出して終了する確率を P_{A}，B が当たりを出して終了する確率を P_{B} とおくと，(1)，(2) より

$$P_{\mathrm{A}}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$P_{\mathrm{B}}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{5}{6}P_{\mathrm{A}}$$

であるから，$P_{\mathrm{A}}>P_{\mathrm{B}}$ となる．よって，A が当たりを出す確率のほうが高い．

(4)　以下，7 を法とする合同式を考え，たとえば

「a を 7 で割った余りが 1 になる確率」

を $P(a\equiv 1)$ と書くことにする．まず

$$X=100a+10b+c\equiv 2a+3b+c \pmod 7$$

である．次に $m(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$ の値に対し，$2m$，$3m$ を 7 で割った余りを表にまとめると，下のようになる．

m	1	2	3	4	5	6
$2m$	2	4	6	1	3	5
$3m$	3	6	2	5	1	4

よって

$$P(2a\equiv i)=\frac{1}{6} \quad (i=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots,\ 6)$$
$$P(3b\equiv j)=\frac{1}{6} \quad (j=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots,\ 6)$$

であるから，X が 7 の倍数になる確率は

$$P(X\equiv 0)=\sum_{k=1}^{6}P(c=k)\cdot P(2a+3b\equiv 7-k)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}P(2a+3b\equiv 7-k)$$
$$=\frac{1}{6}\{1-P(2a+3b\equiv 0)\}$$

であり，ここで

$$P(2a+3b\equiv 0)=\sum_{k=1}^{6}P(2a\equiv k)\cdot P(3b\equiv 7-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{6}$$

であるから

$$P(X\equiv 0)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}$$

となる．よって，A が当たりを出して終了する確率を Q_{A}，B が当たりを出して終了する確率を Q_{B} とおくと

$$Q_{\mathrm{A}}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{5}{36}\right)^{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{36}$$
$$Q_{\mathrm{B}}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{5}{36}\right)^{k}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\left(1-\frac{5}{36}\right)\cdot\frac{6}{5}Q_{\mathrm{A}}$$
$$=\frac{31}{30}Q_{\mathrm{A}}$$

であるから，$Q_{\mathrm{A}} < Q_{\mathrm{B}}$ となる．よって，B が当たりを出す確率のほうが高い．

（余談）

お茶の水女子大学では，この問題に 60 分かけてよい，という形式になっています（180 分で３問）．

中西個人としては「気合いで数え上げ！」も好きなのですが，今回は，解けて終わり，ではなく「数え上げで見つけたことをうまく表現した答案」が望まれているからこその長い試験時間なのかな，と思います．

エレガントな強者の皆さんは，サイコロの数が増えても対応できるように，合同式などを取り入れて，脳内の『数学ワールド』を広げておきましょう．

（数学科　中西）