強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（Ⅲ C）

$x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める．

(1)　導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2)　$f(x)\geqq 0$ を示せ．

(3)　正の実数 p，q について，不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2} \geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

＜解答＞

(1)

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{x}{\frac{x^2+1}{2}}+(x-1)-2x\log x-x$$
$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$

$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{x}{\frac{x^2+1}{2}}+1-2\log x-2$$
$$=\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x^2}{x^2+1}-2\log x-1$$
$$=\log\frac{x^2+1}{2}-\frac{2}{x^2+1}-2\log x+1$$

$$f'''(x)=\frac{x}{\frac{x^2+1}{2}}-\frac{2}{x}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

である．よって，$f''(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		↘	0	↗

となる．よって，$f''(x)\geqq 0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加である．

(2)　$f'(1)=0$ であるから，(1) より，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

となる．よって，$f(x)\geqq 0$ である．

(3)　(2) より正の実数 p，q に対して

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^2+1\right\}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^2+1\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}-1\right)^2-\left(\frac{p}{q}\right)^2\log\frac{p}{q}\geqq 0$$

が成立する．q^2 倍して整理すると

$$\frac{p^2+q^2}{2}\left(\log\frac{p^2+q^2}{2}-\log q^2\right)+\frac{1}{2}(p-q)^2-\frac{p^2}{2}(\log p^2-\log q^2)\geqq 0$$
$$\iff \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2} \geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

である．

□

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回の問題はいかがだったでしょうか？易しいと感じた人は微分がしっかり固まっている人ですね．(1) で詰まったという人は，まだ微分の練習不足です．多くの問題で使う考え方なので，しっかりマスターしてください．

以下，設問ごとの補足です．

(1)　$f'(x)$ が単調増加を示すには，$f''(x) \geqq 0$ を示せば OK です．$f''(x)$ を計算するところまでは皆できるでしょう (計算ミスしないように！)．ところが, ここで困ります. $f''(x)$ の符号は自明ではなく, すぐに 0 以上だとは言えません．こんなときに覚えておいてほしいのが

「困ったらもう一度微分する」

ということです．微分することで，増減表・グラフが考えられ，関数の符号が分かることが多々あります．本問では $f''(x)$ の符号が知りたいのですが，$y=f''(x)$ のグラフさえ描ければ x 軸との上下関係で $f''(x)$ の符号は分かります．方程式・不等式をグラフを描いて考えるのはよくある手段ですね．微分して符号が分からないからそこであきらめるというのは一番やってはいけないことです．粘ってください．

もう一歩話を進めておくと，$f'(x)$ の符号を調べるとき，符号が決まっている部分を除いて考えて構いません．例えば

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

のような形であれば，分母 x^2 は符号が正と確定しているので，$g(x)$ の符号を調べれば十分です．$g(x)$ を抜き出して微分すれば，計算量を減らすことができます．

(2)　解答はさらっと書いていますが，ここが本問の最も難しいところです．$f(x)$ の増減を知るために $f'(x)$ の符号が知りたいのですが，簡単には分かりません．そこで，(1) を使います．

$f'(x)$ が単調増加であることから，$f'(x)$ の符号としては

①　常に $f'(x) \geqq 0$

②　常に $f'(x) \leqq 0$

③　ある $\alpha\,(>0)$ があって

$0<x<\alpha$ のとき	$f'(x)<0$
$x=\alpha$ のとき	$f'(x)=0$
$x>\alpha$ のとき	$f'(x)>0$

のいずれかになります (単調増加というだけで ③ だと決めつける人がいますが，それは間違いです)．本問では

$$\lim_{x\to+0} f'(x)=-1,\ \lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$$

より，③ だと分かります．すると，$x=\alpha$ のとき $f(x)$ は最小になり，示すことは $f(\alpha) \geqq 0$ になります．

ここで，正体の分からない $f(\alpha)$ が正であることをどう示すか．$f(\alpha)$ が良い形であれば，相加相乗平均の関係など有名不等式を使って示せるかもしれません．しかし，本問では $f(\alpha)$ はそのような形ではありません．さてどうしたものかとなるわけですが，素朴な考えがこの困難を解決してくれます．それは

「α を見つける」

というなんとも初歩的な考えです．実は方程式 $f'(x)=0$ は解けるのです．(1) があるので，実数解の個数は高々 1 個です．したがって，解を見つけてしまえば解けたことになります．$f'(x)$ の式をよーく眺めてみましょう．何を代入したら 0 になりますか？ log が消えないといけないですね．$x=1$ が見えますか？見えたら勝ちです．

このように，方程式の解き方として

①　グラフを用いて実数解の個数を把握

②　① の個数だけ，実数解を見つける

というものがあります．頭では分かっている単純なことでも，いざやれと言われると意外とできないと思います．頭の片隅に留めておいてください．

(3)　(2) の利用がテーマです．x に何を代入したら良いかを考えましょう．示す式が p，q の同次式

なので $x=\dfrac{q}{p}$ や $x=\dfrac{p}{q}$ として考えてほしいところです．

最後に，$f'(x)$ の零点を自力で発見する必要のある類題を出しておきます．ぜひ自分のものにしてください．

類題

a を実数とする．関数

$$f(x)=x\log\frac{x}{a}+(1-x)\log\frac{1-x}{1-a}-2x^2+4ax$$
$$(0<x<1)$$

の最小値を求めよ．

＜解答＞

真数条件より $0<a<1$ である．

$0<x<1$ において

$$\begin{aligned} f'(x)&=\log\frac{x}{a}+x\cdot\frac{1}{x}\\ &\quad-\log\frac{1-x}{1-a}+(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}-4x+4a\\ &=\log x-\log(1-x)\\ &\quad-(\log a-\log(1-a))-4(x-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-4\\ &=\frac{(2x-1)^2}{x(1-x)}\geqq 0\end{aligned}$$

であるので，$f'(x)$ は単調増加で，$f'(a)=0$ であることに注意すると

$0<x<a$ で $f'(x)<0$ より $f(x)$ は単調減少

$a<x<1$ で $f'(x)>0$ より $f(x)$ は単調増加

となり，最小値は

$f(a)=2a^2$

である．

＜解答終＞

今回はここまでにしたいと思います．いよいよ夏がやってきます．受験生にとっては，受験の天王山です．もっとも勉強時間のとれるときですので，悔いを残さぬようやりきって，秋に成長した自分と出会えるようにしてください．

（数学科　川崎）