強者の戦略

数学科の竹本です．今回は

定積分＝関数の差　$\longrightarrow$　平均値の定理

体積の計算

がポイントになります．

数学第２問（IIIC）

(1)　$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数とする．このとき

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \quad (a < c < b)$$

となる c が存在することを示せ．

(2)　$y=\sin x$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と $y=1$ および y 軸が囲む図形を，y 軸のまわりに回転して得られる立体を考える．この立体を y 軸に垂直な $n-1$ 個の平面によって各部分の体積が等しくなるように n 個に分割するとき，$y=1$ に最も近い平面の y 座標を y_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1-y_n)$ を求めよ．

(1)　$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，$a \leqq x \leqq b$ のとき平均値の定理より

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c) \qquad (a < c < b)$$

となる c が存在するので題意は成り立つ．

(2)　与えられた立体の体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^1 x^2 dy$$

となり，$y=\sin x$ より

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad dy = \cos x dx$$

y	0	$\to$	1
x	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

であるから

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx \\
&= \pi\left\{\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{\pi^2}{4} - 2\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\
&= \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)
\end{aligned}
$$

となるので，題意より

$$
\frac{V}{n} = \pi\int_{y_n}^{1} x^2 dy
$$

となり，$y=\sin x$ の逆関数を $x=g(y)$ とすると (1) より

$$
\pi\int_{y_n}^{1}\{g(y)\}^2 dy = \pi(1-y_n)\{g(c_n)\}^2 \qquad (y_n < c_n < 1)
$$

となる c_n が存在するので

$$
n(1-y_n) = \frac{V}{\pi\{g(c_n)\}^2}
$$

となる．$n\to\infty$ のとき $y_n\to 1$ であるから $c_n\to 1$ となるので

$$
\lim_{n\to\infty} n(1-y_n) = \frac{V}{\pi\{g(1)\}^2} = \frac{\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}{\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}
$$

となる．

＊　いかがでしょうか？問題となるのは (1) をいかに使うかということですが，V を求めるときは置換積分を用いるとうまく積分区間が求まるのですが，$y_n \leqq y \leqq 1$ の範囲の体積を計算するときにはうまく積分区間がでてきません．そこで (1) を用いて計算したわけです．つまったら前の問題にもどって考えるのはとても大事だと思います．