強者の戦略

それでは，まず問題の確認からいってみましょう．

> 問題
>
> 1 個のサイコロを 3 回振り，出た目を順に一の位，十の位，百の位として 3 桁の数を作ることにする．
>
> (1)　出た目 3 つの和（つまり，出来た 3 桁の数の各位の数の和）が 7 の倍数になる確率を求めよ．
>
> (2)　出来た 3 桁の数が 7 の倍数になる確率と，(1) で求めた確率が等しくなることを示せ．

(1)，(2) ともに，サイコロを n 回振って n 桁の数を考える場合に拡張できますので，その形で解答を考えていきます．

また，(1) は「べたべたな」日本語で，(2) は前回紹介した合同式を利用した文章で解答を作成しています．

［解答］

n を自然数とし，n 回目に出た目を a_n とする．

(1)　出た目 n 個の和を

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

とおき，X_n が 7 の倍数になる確率を p_n とおく．

まず，$X_1(=a_1)$ は 1，2，3，4，5，6 のいずれかなので，7 の倍数にはならず，$p_1=0$ である．

次に，$a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は 1，2，3，4，5，6 のいずれかなので，X_n が 7 の倍数のとき，X_{n+1} $(=X_n+a_{n+1})$ は 7 の倍数でない．また，X_n が 7 の倍数でないときは，X_n を 7 で割った余りが 1，2，3，4，5，6 のいずれかなので

$$(X_n \text{ を } 7 \text{ で割った余り})+a_{n+1}$$

が 7 になるとき，X_{n+1} は 7 の倍数となる．この確率は，X_n を 7 で割った余りによらず $\dfrac{1}{6}$ である．ゆえに

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}(1-p_n)$$

$$\iff p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となる．この式を変形して

$$p_{n+1}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_{n+1}-\frac{1}{7}\right)$$

となるので，$p_1=0$ より

$$p_n-\frac{1}{7}=\left(p_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ p_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

となる．ゆえに，求める確率は

$$p_3=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$$

である．

(2)　出た目を順に一の位から並べた n 桁の数を

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}\cdot a_k$$

とおき，Y_n が 7 の倍数になる確率を q_n とおく．

まず，$Y_1(=a_1)$ は 1，2，3，4，5，6 のいずれかなので，7 の倍数にはならず，$q_1=0$ である．

次に

$$Y_{n+1}=Y_n+10^n\cdot a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であり，n が自然数のとき 10^n と 7 は互いに素なので，$\{10^n\cdot 1,\ 10^n\cdot 2,\ 10^n\cdot 3,\ 10^n\cdot 4,\ 10^n\cdot 5,\ 10^n\cdot 6\}$ を 7 で割った余りはすべて異なり

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

の並べ替えに一致する（※）．よって，7 を法とする合同式で考えると

$Y_n\equiv 0$ のとき $Y_{n+1}\not\equiv 0$

$Y_n\not\equiv 0$ のとき，Y_n によらず $\dfrac{1}{6}$ の確率で $Y_{n+1}\equiv 0$

となる．ゆえに

$$q_{n+1}=\frac{1}{6}(1-q_n)$$

$$\iff q_{n+1}=-\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{6}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ．

以上より，(1) で考えた p_n と初項，漸化式ともに一致するので，2 つの確率が一致することが示された．

（証明終）

【（※）の証明】

（『京大阪大整数問題集中特訓』のテキストを持っている人は $p.62$ を参照のこと）

背理法を用いて示す．すなわち，j，k を $1 \leqq j < k \leqq 6$ を満たす自然数とし

$$10^n \cdot j \equiv 10^n \cdot k \pmod 7 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つとして矛盾を導く．① より

$$10^n(k-j) \equiv 0 \pmod 7$$

となる．ここで 7 と 10^n が互いに素なことから

$$k-j \equiv 0 \pmod 7 \quad \cdots\cdots ②$$

となるが，j，k は $1 \leqq j < k \leqq 6$ を満たす自然数ゆえ

$$1 \leqq k-j \leqq 5$$

となり，② が成り立つことに矛盾する．以上より

$\{10^n \cdot 1, 10^n \cdot 2, 10^n \cdot 3, 10^n \cdot 4, 10^n \cdot 5, 10^n \cdot 6\}$

を 7 で割った余りはすべて異なる．また，要素の個数が 6 個で 7 で割り切れるものはないので，これらは

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

の並び替えと一致する．

（証明終）

（コメント）

(2) の問題は，3 の倍数のときのように「各桁の数を 0 から 9 までの数から無作為に選ぶ」ようにすると，$10^n \cdot 7$ など 7 で割り切れるものが混ざってきたりするため，示すことができません．「各桁の数をサイコロの目，つまり 1 から 6 の《7 で割ったときの 0 以外の余り 6 つ》の数字から選ぶ」からこそ，(1) の確率と等しい漸化式になるわけです．

『京大阪大整数問題集中特訓』のテキストでは『7 は孤独な数字』として描かれていましたが，今回は「10 と互いに素である」，「サイコロの面の数より 1 だけ多い」という性質を活かして大活躍してくれました．

適切な場さえ整えてあげれば，意外とみんなと仲良くなれる……7 はそういう特別な数字なのかもしれませんね．

（数学科　中西）