強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（Ⅲ C）

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される１次変換を f，$B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表される１次変換を g とする．

(1)　どんなベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ に対しても，内積の間に

$$f(\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot g(\vec{v})$$

の関係が成り立つことを示せ．

(2)　f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする．l 上に O と異なる点 P をとり，P の f による像を Q，g による像を R とする．このとき，次の (イ)(ロ) のいずれかが成り立つことを示せ．

(イ)　Q＝R

(ロ)　3 点 Q，R，O は直角三角形の頂点となる．

＜解答＞

(1)　$\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

とおく．

$$f(\vec{u})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} f(\vec{u})\cdot\vec{v}&=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\ &=(ax+by)z+(cx+dy)w \\ &=axz+byz+cxw+dyw \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．また

$$g(\vec{v})=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} az+cw \\ bz+dw \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot g(\vec{v})&=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} az+cw \\ bz+dw \end{pmatrix} \\ &=x(az+cw)+y(bz+dw) \\ &=axz+byz+cxw+dyw \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

である．以上 ①，② より

$$f(\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot g(\vec{v})$$

が成り立つ．

(2)　(1) の $\vec{u}$，$\vec{v}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とすると

$$\begin{aligned} & f\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot g\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \\ \iff\ & \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad \cdots\cdots ① \\ \iff\ & \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)=0 \\ \iff\ & \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0}$ に注意すると

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\vec{0}$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$

のいずれかが成り立つ．

(i) のとき，Q と R は一致するので，(イ) が成り立つ．

(ii) のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=f\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\vec{0}$$

とすると，任意の実数 k に対して

$$f\left(k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=kf\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\vec{0}$$

となるので l 上の任意の点の f による像が O となり，直線 l の像が l 自身であることに反する．よって，Q は l 上，すなわち直線 OP 上の点であり，

さらにOと異なる．すると，① の左辺は0ではないので，右辺も0ではなく，これからRもOとは異なる点である．よって，3点O，Q，Rは相異なり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QR}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QR}}$$

であるから(ロ)が成り立つ．

□

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回は数Cの行列・1次変換の問題を出してみました(京都大学の過去問です)．これまでに，このコーナーで扱っていなかったですが，近年出題は増えています．課程の変わり目で，あと2年間は狙い目になる可能性がありますので対策は十分に行ってください．

以下設問ごとの補足です．

(1) $\vec{u}$，$\vec{v}$ の成分を文字でおいて，丁寧に計算しましょう．文字がたくさん出てきますが，文字が多くても計算・処理しきる力は強者を目指す皆さんには絶対必要です．

なお，行列 A，B はある関係をもっています．それにまつわる話は後の＜おまけ＞のところに書いておきます．

(2) (1)をどう使うかが問題です．条件から

$$f\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ g\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

なので

$$\vec{u}=\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots\cdots(*)$$

とすることに気づきたいところです．見た瞬間これでうまくいくと分かる人は稀かもしれません．いつも言っていることですが，「とりあえずやってみる」の姿勢が大事です．さらに「ダメならあきらめず他に何かできないか考える」という姿勢まで身に付くと数学の力は伸びてきます．(*)に気づけばほぼゴールは見えたようなものですが，1つだけ注意することがあります．それは条件(ロ)で「Q，R，Oは直角三角形の頂点になる」と言っているので，これら3点が異なることを示さなくてはいけないという点です．これを気にせずに内積が0だけから結論を示したつもりになっていると大減点されるので気をつけてください．解答では背理法を用いて，OとQが一致してしまうと，l の像が1点につぶれてしまうことから矛盾を導きました．「固有値」を使って説明すれば，l の像が l 自身というのは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が行列 A の0ではない固有値の固有ベクトルになっているということで，この「0ではない」の部分が本質的に効いてきます．

＜おまけ＞

行列 A に対して，A の行と列を入れかえてできる行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表します．

(例)

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA=(1\ \ 2)$$

本問では，${}^tA=B$ となっていますね．実はこの転置行列の計算には，次の式が成り立ちます（行列に慣れていない人は証明を読み飛ばしても構いません．2 × 2行列で実際に計算してみてもいいでしょう）．

＜公式＞

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

＜証明＞

行列 A の $(i,\ j)$ 成分を A_{ij} などと書く．一般に

$${}^tA_{ij}=A_{ji}$$

が成り立つ．

$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}$$

であるから

$$^t(AB)_{ij}=\sum_k A_{jk}B_{ki}$$

である.

また

$$({}^tB\,{}^tA)_{ij}=\sum_k {}^tB_{ik}{}^tA_{kj}$$
$$=\sum_k A_{jk}B_{ki}$$

である．よって，各成分が一致するので

$$^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

が成り立つ.

□

※ $\sum\limits_k$ は $\sum\limits_{k=1}^{n}$ を略記したものです．k の範囲を明記しなくても分かる場合にこのように書くことがあります.

さらに，2 つのベクトル

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$$

に対して，内積は

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xz+yw$$

ですが，これは

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=xz+yw$$

という 1×2 行列と 2×1 行列の積と同一視することができます．すなわち

$$\vec{u}\cdot\vec{v}={}^t\vec{u}\vec{v}$$

です (右辺は行列の積)．内積をこのように見ると

$$f(\vec{u})\cdot\vec{v}={}^t(A\vec{u})\vec{v}$$
$$={}^t\vec{u}\,{}^tA\vec{v}\quad\cdots\cdots(**)$$
$$=\vec{u}\cdot{}^tA\vec{v}$$
$$=\vec{u}\cdot g(\vec{v})$$

となって，(1) が示せます．(**) の部分で先ほどの公式を使いました.

転置行列のこの性質を使う問題をもう 1 問やってみましょう.

問

2 次の正方行列 A とその転置行列 ${}^tA$ が

$${}^tAA=E\ (\text{単位行列})$$

を満たすとする．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 任意のベクトル $\vec{u}$ に対して

$$\left|A\vec{u}\right|=\left|\vec{u}\right|$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意のベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ に対して

$$A\vec{u}\cdot A\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}$$

が成り立つことを示せ.

＜解答＞

(1)
$$\left|A\vec{u}\right|^2=A\vec{u}\cdot A\vec{u}$$
$$={}^t\left(A\vec{u}\right)A\vec{u}$$
$$={}^t\vec{u}\,{}^tAA\vec{u}$$
$$={}^t\vec{u}\vec{u}$$
$$=\vec{u}\cdot\vec{u}$$
$$=\left|\vec{u}\right|^2$$

であるから

$$\left|A\vec{u}\right|=\left|\vec{u}\right|$$

である.

(2)
$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$\iff\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2\right)$$

であるから

$$
\begin{aligned}
A\vec{u}\cdot A\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\left|A\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right|^2\right.\\
&\qquad\left.-\left|A\vec{u}\right|^2-\left|A\vec{v}\right|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2\right)\\
&= \vec{u}\cdot\vec{v}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

□

${}^{t}AA=E$ を満たす行列を**直交行列**と言います．少し頑張って計算すると，実数を成分とする直交行列は

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
$$

の形になることが示せます．左は原点を中心とする角 θ の回転を表す行列で，右は原点を通る直線に対する対称変換を表す行列です．

どちらも，原点を始点とするベクトルの長さやなす角を保つ変換になっています．それを行列 A の正体を明かさずに計算で示したのが今の問になります．

まだまだ奥深い事実が行列には潜んでいます．興味がある人は大学に入ってから (もしくは入る前でも構いませんが)「線形代数」をしっかり勉強してください.

それでは，今回はここまでにしたいと思います.
また次回.

(数学科　川崎)