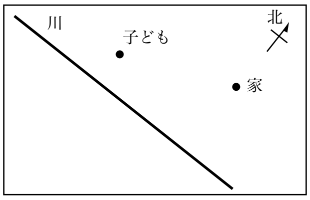
強者の戦略

さっそく，問題の確認からいってみましょう．

> 問題
>
> **【1】** 右図（図は下にあります）中の子どもが家に帰る経路を考える．ただし， 家，川以外の建物や道路は無く，平原が広がっているものとして，以下の問いに答えよ．
>
> (1) 一度川に寄って水をくんでから家に帰る最短ルートを作図して求めよ．
>
> (2) 川の北側の領域のみで作図して (1) の最短ルートを求めよ．
>
> (3) (1) と (2) が同じになることを証明せよ．
>
> 
>

作図の仕方さえわかれば, (1) は一瞬で解けますが, 人によっては. (2) で困った人もいるかもしれません. 強者の皆さんが目指す大学の入試では,「最も有名で使いやすい解法」だけでなく,「別解まで把握しておき，場合に応じて使い分ける力」を要求されます．以下に，解答と，その理由を説明していきますので，これを機会に作図のバリエーションを増やしておきましょう．

［解答］

川を直線 l，子どものいる地点を A，家のある地点を B とおく．

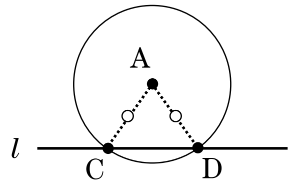
まず，A から l に対して垂線を下ろすときの作図を考える．

最初に，中心が A で十分な大きさの半径（A と l の距離よりも大きい半径）をもつ円と l の交点を作図して，直線 l 上に 2 点 C，D を

$$AC=AD$$

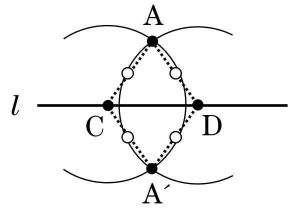
となるようにとる．（図１参照）

（図１）



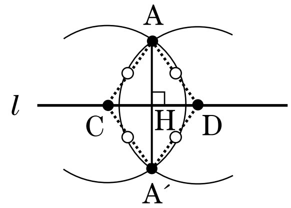
(a) 次に C，D が中心で，半径が CA＝DA となる円をそれぞれ描き，A でない方の交点を A′ とおくと，A′ が l に関する A の対称点となる．（図２参照）．

（図２）



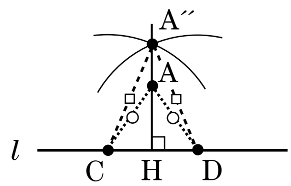
さらに，直線 AA′ と l の交点を H とすると， AH ⊥ l となる．（図３参照）

（図３）



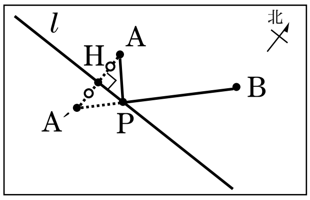
(b) l より南側を使えない場合は，C，D が中心で，半径が CA や DA とは異なる円をそれぞれ描き，川の北側にできる交点を A″ とおく．さらに，直線 AA″ と l の交点を H とすると， AH ⊥ l となる．（図４参照）

（図４）

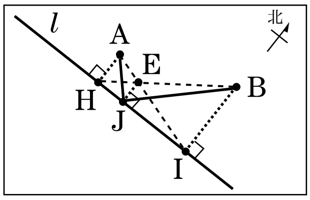


以上，(a)，(b) を用いれば，(1)，(2) いずれの場合も，点から直線に垂線を下ろす作図ができる．

(1)　(a) を用いて，A の l に関する対称点 A′ を作図すれば，直線 A′B と l の交点 P に立ち寄るルートが最短となる．



(2)　(b) を用いて，A，B から l に下ろした垂線の足をそれぞれ H，I とする．さらに，2 直線 AI と BH の交点を E とおき，(b) を用いて作図できる E から l に下ろした垂線の足を J とすれば, J に立ち寄るルートが最短となる．【(※)】



(3)　まず，(1) で考えた図において，B から l に下ろした垂線の足を (2) と同様に I とおくと

$\angle$ A′HP＝$\angle$ BIP (直角)

$\angle$ A′PH＝$\angle$ BPI (対頂角)

より 2 角相等なので

△ A′PH ∽ △ BPI

となる．さらに，A′ は l に関する A の対称点ゆえ

HP : IP＝A′H : BI＝AH : BI　……①

が成り立つ．

次に，(2) で考えた図において，AH // BI ゆえ，錯角に注目して

$\angle$ EAH＝$\angle$ EIB

$\angle$ EHA＝$\angle$ EBI

より 2 角相等なので

△ AEH ∽ △ IEB

となる．よって

AH : IB＝HE : BE　……②

である．さらに，EJ // BI なので

HE : BE＝HJ : IJ　……③

である．ゆえに，②，③ より

AH : IB＝HJ : IJ

$\Longleftrightarrow$　AH : BI＝HJ : JI　……④

である．

よって，①，④ より

HP : IP＝HJ : JI

$\Longleftrightarrow$　HP : PI＝HJ : JI

であり，共に内分点ゆえ，2 点 P，J の場所は一致する．以上より，(1)，(2) の 2 つのルートは一致する．

（証明終）

【(※) について】

(2) を解いたことがなくても，(1) が作図できていれば，(3) の問題文より，(2) で作図する点は (1) と同じ点であると推測できる（後に (3) で証明もなされる）．

そこで，l の北側のみで (1) の点 P と同じ点を作図するために，点 P が満たしている条件や性質を考える．B から l に下ろした垂線の足を I とおくと

$\angle$ APH＝$\angle$ A′PH＝$\angle$ BPI

(A′ が A の対称点，かつ，対頂角)

$\angle$ AHP＝$\angle$ BIP (直角)

より

△ APH ∽ △ BPI

なので，点 P は

HP : PI＝AH : BI　……⑤

を満たす点だとわかる．

最後に，⑤ を満たす点，つまり線分 HI を AH : BI の比に内分する点を考えるために，図内の別の場所から AH : BI を作りだそうと考えると，AH // BI なので，2 線分 AI と BH を交わらせれば（中学生のときに体験済みのはずの有名問題を踏まえて）平行線における錯角を用いて，相似比が AH : BI である 2 つの三角形（△ AEH，△ IEB）を作ることができる．

（コメント）

(a) では，ひし形の対角線が，互いの中点で垂直に交わること，(b) では，2 点 C，D からの距離が等しい点の軌跡は線分 CD の垂直二等分線になること

（もしくは，二等辺三角形の頂点から底辺に垂線を下ろすと，必ず垂直二等分線になること）を用いています．

(1) では，対称点を利用することで，2 点 A′ と B を l に関して逆側に配置し

「長さが最小」＝「真っ直ぐになるとき」

という性質を使える状態にする有名な解法ですが，(2) では，l の南側が使えないため，【(※）について】の部分で述べたような工夫を考える必要があるのです．

続いて，【2】の解説に移りましょう．

> 問題
>
> 【2】 n を自然数とする．座標平面上の $4n$ 個の点
>
> $(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ \cdots\cdots,\ (2n,\ 0),$
>
> $(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (0,\ 2n)$
>
> を 2 つずつ $2n$ 個の組に分けて，それぞれの組における 2 点の距離の和を考える．このような和が最大になるときの，2 点の距離の 2 乗の和を求めよ．

〈方針〉

$n=2$ で，点の数が計 8 個であれば，組み分けの場合の数は

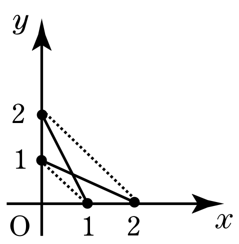
$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 2520 \text{（通り）}$$

なので，一応有限の値なのですが，それでもすべてのパターンを実際に計算してみることは労力がかかりすぎます．ですので，何か，一般的に考えられる方法がないか，考えてみます．

おそらく，多くの方にとって見慣れない問題だと思いますので

「見慣れない問題は，まず実験する．」

に従って，最初に $n=1$ のときを考えてみましょう．

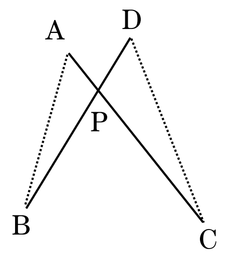


上の図の，実線部と点線部の長さの和を考えれば，実線部の長さの和のほうが長いことが，直観でもわかると思います．（具体的に計算してみると，実線部が $2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ ，点線部が $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$ です）つまり，2 線分の場合は，交わっていたほうが長さの和が大きくなるわけです．

このことを拡張して，$2n$ 本のすべての線分が交わっているような場合を作ることができるか ……，という順番で考えていきましょう．

［解答］

まず，ある 1 組の 2 線分に注目して，2 線分が交わるときと交わらないときを考えると，次図において



$$\begin{aligned} AC+BD &= AP+PC+BP+PD \\ &= (AP+BP)+(PC+PD) \\ &> AB+CD \end{aligned}$$

となることより，交わるときのほうが線分の長さの和は大きくなる．

また，2 線分（の一部が）が重なるときと 1 点で交わるときを考えても，上と同じ理由で，交わるときのほうが線分の長さの和は大きくなる．よって，すべての線分が他の線分と交点を持つような組み分けを行ったとき，題意の「それぞれの組における 2 点の距離の和」は最大となるので，以下，そのような組み分けの方法を考える．

最初に，x 軸上の 2 点，または，y 軸上の 2 点を結んで線分を作ると，他の線分と（端点は共有できるが）交点をもてないので不適．よって，x 軸上の点と y 軸上の点で組を作ることが必要である．

次に $(0,\ 1)$ から線分をのばすとき，終点を $(2n,\ 0)$ 以外の点から選ぶと，$(0,\ l)\ (l=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ の

いずれかと $(2n,\ 0)$ を結ぶことになり，この 2 つの線分は交点をもたないので不適．よって，$(0,\ 1)$ と $(2n,\ 0)$ を組にすることが必要である．

以下，同様に考えると，すべての線分が他の線分と交点を持つには，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n$ に対して

$$(0,\ k) \text{ と } (2n-k+1,\ 0)$$

を結ぶことが必要であり，このとき逆に，すべての線分は交点を持つので十分である．

ゆえに，求める「2 点の距離の 2 乗の和」は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n}\left(\sqrt{(2n-k+1)^2+(-k)^2}\right)^2\\
&=\sum_{k=1}^{2n}\{(2n-k+1)^2+k^2\}\\
&=\sum_{k=1}^{2n}(2n-k+1)^2+\sum_{k=1}^{2n}k^2\\
&=\sum_{m=1}^{2n}m^2+\sum_{k=1}^{2n}k^2\\
&=2\sum_{k=1}^{2n}k^2\\
&=\frac{2}{3}n(2n+1)(4n+1)
\end{aligned}$$

である．

（コメント）

【2】の問題は，2008 年度，早稲田大学の教育学部の入試で出題された問題を改題したものでした．**【1】**とは逆に，なるべく折れ曲がっていたほうが長さが大きくなる，ということに注目して考える問題になっています．

また，この問題は各軸上にある点の数が偶数個ずつであり，解答の $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ のときと $k=2n,\ 2n-1,\ \cdots\cdots,\ n+1$ のときの線分の長さがそれぞれ等しくなるので，「半分だけ和を計算して 2 倍する」という解法でも解けるのですが，先の解答のように $m=2n-k+1$ の置き換えを利用すれば，偶数個，奇数個に関係なく，同じように解くことができます．（元々の入試問題では，各軸上の点は 3 個ずつ，計 6 個の点で考える問題です）．

2 つの問題を通して，1 カ所でも心惹かれる部分があったでしょうか．もしあったのならば，その場で印象に残し，考え方の選択肢を増やしていって下さい．

（数学科　中西）