強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（IIIC）

(1)　自然数 n に対して

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq \log n + 1$$

が成り立つことを示せ．

(2)　自然数 n に対し，n の正の約数の個数を a_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

を求めよ．

＜解答＞

(1)　k を自然数とする．区間 $k \leqq x \leqq k+1$ において，$y = \dfrac{1}{x}$ は単調に減少するので

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}$$

が成り立つ．この各辺を積分して

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

$$\iff \frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots①$$

となる．$n \geqq 2$ のとき，① の左側の不等式を $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ で加えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} &\leqq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \\ &= \big[\log x\big]_1^n \\ &= \log n\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + 1 \leqq \log n + 1$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq \log n + 1 \quad \cdots\cdots②$$

であり，この不等式は $n=1$ でも成立する．また，① の右側の不等式を $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ で加えると

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\iff \log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots③$$

である．よって，①，② より

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq \log n + 1$$

が成り立つ．

(2)　自然数 n に対して，n の正の約数の個数は

曲線 $y = \dfrac{n}{x}$ $(x>0)$ 上の格子点の個数に一致する．よって，n 以下の自然数の正の約数の個数の

総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は，不等式

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ y \leqq \frac{n}{x}$$

が表す領域内にある格子点の個数に一致する．

この領域の $x=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ 上の格子点の個数は

$$\left[\frac{n}{k}\right] \text{（個）}$$

である (実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．)

よって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]$$

が成り立つ．

ここで，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して

$$\frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k}\right] \leqq \frac{n}{k}$$

であるから，足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} - n < \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$$

となる．n が十分大のとき，各辺を $n\log n$ で割って

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{\log n}<\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$\leqq\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\cdots\cdots(*)$$

である．

(1) の不等式より，n が十分大のとき

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}\leqq\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\frac{1}{\log n}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}$$
$$=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)=1$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$$

である．すると，$(*)$ において，左辺と右辺は，$n\to\infty$ のときともに 1 に収束するので，再びはさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}a_k=1$$

である．

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回は数Ⅲの積分・極限に，整数を絡めて出題してみました．「約数の個数」をどう扱うかが難しかったと思います．うまく数えることができましたか？

以下設問ごとに補足です．

(1)　基本問題です．強者を目指す皆さんなら類題の経験はありますね．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を計算するのは厳しいので (そもそも計算せよという問題ではないですが)，長方形の面積の和と見なして，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ を使って上下それぞれ評価します．幅 1 の長方形を考え，足してください．

(2)「約数の個数の和」という，あまり見かけないテーマの問題です．自然数 n が

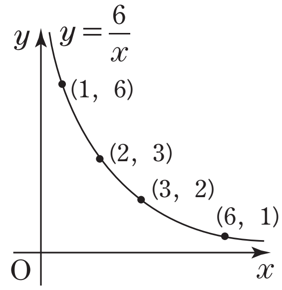
$p^aq^br^c\cdots$（p，q，r，$\cdots\cdots$ は相異なる素数)

と素因数分解されるとき，n の正の約数の個数は

$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$

となります．ここから考えた人も多かったと思いますが，一般に自然数を素因数分解するのは n が大きくなると難しく，a_n を n の式で表すのは至難の業です．

そこで，発想を変えてみましょう．鍵になるのは，自然数 n に対して，その正の約数 a をとったとき，$\dfrac{n}{a}$ も n の正の約数になるという当たり前の事実です．これから，$\left(a, \dfrac{n}{a}\right)$ と 2 つの約数をペアを考えると，これは曲線 $y=\dfrac{n}{x}$ $(x>0)$ 上にある格子点に 1 対 1 に対応することが分かります．すなわち，n の正の約数の個数と，曲線 $y=\dfrac{n}{x}$ 上の $x>0$ の部分の格子点の個数は一致するのです．例えば，$n=6$ とすれば，下図のようになります．



6 の正の約数 4 個が格子点の x 座標に対応しているのが見てとれますね．

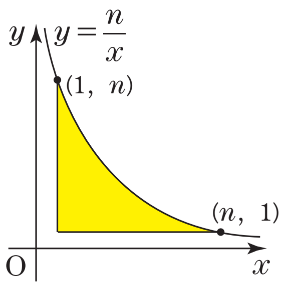
$n-1$ の約数は曲線 $y=\dfrac{n-1}{x}$ 上の格子点に，

$n-2$ の約数は曲線 $y=\dfrac{n-2}{x}$ 上の格子点に，$\cdots\cdots$

と対応していきます．$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x\geqq 1,\ y\geqq 1)$ はこの領域に含まれるので，結局約数の個数の和は

$$x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ y\leqq\frac{n}{x}$$

が表す下図の領域内の格子点の個数と一致することになります．



ここからは，格子点の個数を数える問題です．$x=k$ もしくは $y=k$ で切り (k は自然数)，その直線上の格子点を数えます．端点が整数値になる場合を考慮して，ガウス記号 ([ ]) を用いていますが，これも定石です．一般に，実数 x に対して

$$x-1<[x]\leqq x$$

が成立するので，この不等式からはさみうちの原理に持ちこめば，極限を求めることができます．ここまでくれば (1) がこの極限を計算するためのヒントだと理解できると思います．

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

が成り立つことに関しては以下のような説明をすることもできます．1 から n までの自然数のうち

1 を約数にもつものは $n\left(=\left[\dfrac{n}{1}\right]\right)$ 個，

2 を約数にもつものは $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 個，

3 を約数にもつものは $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ 個，

4 を約数にもつものは $\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 個，……

となるので，約数の個数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

となります．これは，1 から n までの各自然数の約数を個別に求めるのではなく，約数を 1 つ決めて，その数を約数にもつような自然数がいくつあるかを数える方法です．私はこの問題を最初に解いたとき，この方法に気づいておらず，「n の約数を視覚化しよう」と考えて上記のように解答したのですが，主役を約数の方にすると，すっきり数えられますね．場合の数の問題などでよく見られますが，「視点を変える」とすっきり解ける問題になっています．

最後におまけです．(1) の級数については，この数学のページの第 21 回に (手書きですが) 関連事項を書いているので参考にしてください．(2) の格子点を数える問題について，少し変則的なものを出しておきますね．

問

xy 平面において，連立不等式

$$\frac{1}{2}x\leqq y\leqq 2x,\ 0\leqq x+y\leqq k$$

で表される領域を D とおく．ただし，k は 1 以上の整数とする．x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という．領域 D に属する格子点の個数を a_k とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　m を 1 以上の整数とする．

$$\frac{1}{2}x\leqq y\leqq 2x,\ x+y=3m+1$$

を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を m を用いて表せ．

(2)　n が 1 以上の整数のとき，a_{3n} を求めよ．

(3)　領域 D の面積を S_k とし，$k=3n$ のときを考える．$\dfrac{a_{3n}}{S_{3n}}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{S_{3n}}$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　直線 $x+y=3m+1$ と直線 $y=2x$，$y=\dfrac{1}{2}x$

の交点の座標はそれぞれ

$$\left(m+\frac{1}{3},2m+\frac{2}{3}\right),\left(2m+\frac{2}{3},m+\frac{1}{3}\right)$$

である．直線 $x+y=3m+1$ 上の点は x 座標が整数のとき y 座標も整数になることに注意すると，求める格子点の個数は $m+\frac{1}{3}\leqq x\leqq 2m+\frac{2}{3}$ を満たす整数 x の個数に等しい．よって，求める格子点の個数は

$$2m-m=m\text{（個）}$$

である．

(2)　$\frac{1}{2}x\leqq y\leqq 2x$ かつ $x+y=k$ を満たす格子点の個数を b_k とおく．(1) から m を 1 以上の整数とするとき

$$b_{3m+1}=m$$

であり，同様にすると

$$b_{3m}=m+1,\ b_{3m+2}=m+1$$

となる．これらは，$m=0$ でも成立する．

これらを足し上げて

$$\begin{aligned}a_{3n}&=\sum_{k=0}^{n-1}(b_{3k}+b_{3k+1}+b_{3k+2})+b_{3n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1+k+k+1)+(n+1)\\&=\frac{3}{2}\cdot n(n-1)+2n+(n+1)\\&=\frac{1}{2}(3n^2+3n+2)\end{aligned}$$

である．

(3)　$k=3n$ のとき

$$S_{3n}=(2n)^2-\left(n^2+n^2+\frac{1}{2}n^2\right)=\frac{3}{2}n^2$$

であるので

$$\frac{a_{3n}}{S_{3n}}=\frac{\frac{1}{2}(3n^2+3n+2)}{\frac{3}{2}n^2}=\frac{3n^2+3n+2}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{S_{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3}=1$$

である．

＜解答終＞

$x=k$ や $y=k$ でなく斜めに切るとどうなるかという問題でした．落ち着いて誘導に乗れば難しくないですね．

それでは今回はここまでにしたいと思います．この原稿が今年度最後になります．受験生の皆さんは，本番まであとわずか．体調管理に注意して，最後の追い込みを頑張ってください．皆さんの朗報を期待しています．

（数学科　川﨑）