強者の戦略

今回の問題は【2013　早稲田大学　社会科学部】の入試問題と，それなりに有名であろう作図の問題を融合して出題してみました．

それでは，まず問題の確認です．

> 問題
>
> 次の各問いに答えよ．
>
> (1)　1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE の外接円の半径を R とする．$\dfrac{1}{R}$ の値を求めよ．
>
> (2)　p，q を有理数とする．
>
> $$10-2\sqrt{5}=p^2+(q+\sqrt{5})^2$$
>
> を満たす p，q の値を求めよ．
>
> (3)　中心 O，半径 1 の円が与えられているとき，コンパスと定規のみで，この円に内接する正五角形を作図せよ．定規は直線を引くことのみに用い，長さを測るために用いてはならない．

(3) の作図方法については，インターネット等で調べればすぐに見つかってしまうと思います．また，この問題とは別のタイプの「線分 AB が与えられているとき，その線分を 1 辺に持つような正五角形を作図せよ」という問題であれば，意欲のある小学 6 年生が挑戦して質問に来ることもあります．

ただ，「なんでこれで作図できるねん！」という部分に関しては，いずれも三平方の定理の力を借りますので，中学範囲で定理を習った後にあれこれ考えたほうが深みが出る作図かな，と感じ，今回中学生・高校生向けに取り上げてみました．

作図ができる理由が予想通りだったかどうか，以下の解答で確認してみてください．

［解答］

(1)　外接円の中心を O とすると

$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{2}{5}\pi$$

であるから，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\frac{2}{5}\pi$$

$$1=2R^2-2R^2\cos\frac{2}{5}\pi \quad \cdots\cdots①$$

となる．ここで $\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ とすると

$$5\theta=2\pi \iff 3\theta=2\pi-2\theta$$

であるから

$$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos(-2\theta)=\cos 2\theta$$

が成り立つ．2 倍角，3 倍角の公式より

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\iff 4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$$

$$\iff (\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$$

となる．ここで，θ は鋭角であるから

$$0<\cos\theta<1$$

となるので

$$\cos\theta=\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

である（詳しくは「強者への道」数学の第 68，69 回参照）．これを ① に代入して

$$1=2R^2\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{2}R^2$$

$$\iff \frac{1}{R^2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{R}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad \left(\because\ \frac{1}{R}>0\right)$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

である．

(2)　与式を変形すると

$$\begin{aligned}10-2\sqrt{5}&=p^2+(q^2+2\sqrt{5}q+5)\\&=(p^2+q^2+5)+2q\sqrt{5}\end{aligned}$$

であり，p，q は有理数なので

$$\begin{cases}10=p^2+q^2+5\\-2=2q\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}p=\pm 2\\q=-1\end{cases}$$

である．

(3)　(1) で求めた値と

強者の戦略

$$R:1=1:\frac{1}{R}$$

より，作図する正五角形の１辺の長さは

$$\frac{1}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

となる．また，(2) より p の値に正の値を選べば

$$10-2\sqrt{5}=2^2+(\sqrt{5}-1)^2$$

となるので三平方の定理より，直角三角形の直角をはさむ２辺の長さの比を $2:\sqrt{5}-1$ にすれば，斜辺も含めた長さの比が $2:\sqrt{5}-1:\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ になる．

以上のことを踏まえて，以下のように作図を行う．

［作図の手順］

１．中心 O を通る直線（直径）を１つ引き，円との交点を A，B とする．

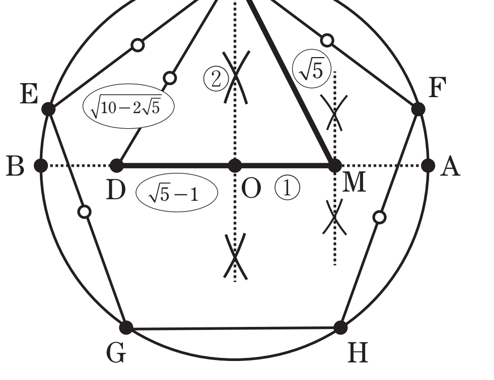
２．線分 OA の垂直二等分線を作図し，線分 OA の中点を M とする．

３．線分 AB の垂直二等分線（点 O を通り，直線 AB に垂直な直線でも可）を引き，円との交点の一方を C とする．

４．直線 AB 上で M から見て O 側に MC＝MD となる点をとる．

５．円上に，点 C からの距離が CD と等しくなる２点をとり，E，F とする．

６．円上に，２点 E，F からの距離が CD と等しくなる２点のうち，C でない方の点をとり，それぞれ G，H とすれば，五角形 CEGHF が求める正五角形となる．



（補足）

手順３の時点で，三角形 COM において三平方の定理より

$$\mathrm{OM}:\mathrm{OC}:\mathrm{CM}=1:2:\sqrt{5}$$

となっている．よって，手順４により

$$\mathrm{OD}=\mathrm{MD}-\mathrm{MO}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

となるため，三角形 COD において三平方の定理より

$$\mathrm{OC}:\mathrm{OD}:\mathrm{CD}=2:(\sqrt{5}-1):\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

となるから，CD の長さが作図したい正五角形の１辺の長さと一致する．

（余談）

三平方の定理によって $2:\sqrt{5}-1:\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ の比を生み出すために利用した $2:\sqrt{5}-1$ の比について，これを書き直すと

$$2:\sqrt{5}-1=1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}:1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$$

となり，黄金比が導かれます．「正五角形は１辺の長さと対角線の長さの比が黄金比になる図形である」という事実を知っている強者ならば，$10-2\sqrt{5}$ をどう分解するのか，という問題についてノーヒントで気づけた人もいるかもしれませんね．

以上で，作図の正当性を確かめることができました．「与えられた線分 AB を１辺にもつ正五角形の作図について」など，昔やり方は覚えたけれど，イマイチ理由が曖昧になっている作図があれば，今一度，理由を考えてみてはどうでしょうか．「中学生・高校生になったからこそ気づけること」がいろいろ発見できて楽しいですよ！

（数学科　中西）