強者の戦略

では解答解説編です．今回は「トレミーの定理」の証明です．もちろん平面幾何の知識で解くことが可能なのですが，ひらめき（？）がないと難しいです．複素数平面を使えば鮮やかに解くことが可能なのでそれを紹介したいと思います．

数学第２問（IA?・IIB?・IIIC?）

円に内接する四角形ABCDにおいて

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つことを示せ．

《解説》

今回は“辺の積”に関する証明なので

① 相似　　　② 余弦定理

が出てくれば完璧だと思います．他にも（これでは証明できませんが）中線定理など思いつけば合格ですね．

解１：相似を用いる

この定理の証明では超がつくほど有名な証明法ですが，なかなか補助線の引き方が思いつけないと思います．対角線BD上に$\angle BAF = \angle CAD$となる点Fをとると，相似な三角形が出てくるのがわかるでしょうか？以下解答になります．

対角線BD上に$\angle BAF = \angle CAD$となる点Fをとると，三角形ABFと三角形ACDにおいて

$$\angle BAF = \angle CAD,\ \angle ABF = \angle ACD$$

であるから三角形ABFと三角形ACDは相似である．ゆえに

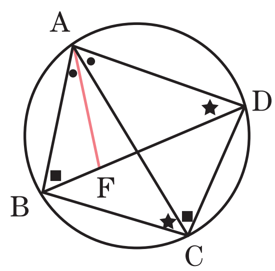
$$AB : BF = AC : CD \iff AB \cdot CD = AC \cdot BF \cdots\cdots ①$$

となる．また三角形ABCと三角形AFDにおいて

$$\angle ACB = \angle ADF,\ \angle BAC = \angle FAD$$

であるから三角形ABCと三角形AFDは相似である．ゆえに

$$AC : BC = AD : FD \iff BC \cdot AD = AC \cdot FD \cdots\cdots ②$$



①，②より

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BF + AC \cdot FD \\ &= AC(BF + FD) \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$

となり示せた．

解２：余弦定理を用いる

円に内接する四角形の性質より向かい合う内角の和が 180° であることを用いて計算していきます．以下解答です．

$a=\mathrm{AD}$，$b=\mathrm{AB}$，$c=\mathrm{BC}$，$d=\mathrm{DC}$ とすると，三角形 ABD において，余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=a^2+b^2-2ab\mathrm{ADcosA}$$

となり，同様に三角形 BCD において

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\mathrm{A})\\&=c^2+d^2+2cd\cos\mathrm{A}\end{aligned}$$

となる，ここから cosA を消去すると

$$(ab+cd)\mathrm{BD}^2=(ad+bc)(ac+bd)\quad\cdots\cdots ①$$

となる．同様に AC についても

$$(ad+bc)\mathrm{AC}^2=(ab+cd)(ac+bd)\quad\cdots\cdots ②$$

となるので，①，② の積を考えて

$$\begin{aligned}&(ab+cd)(ad+bc)\mathrm{BD}^2\mathrm{AC}^2=(ad+bc)(ac+bd)^2(ab+cd)\\\iff\ &\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}=ac+bd=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}+\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}\end{aligned}$$

より示せた．

なかなかに計算がしんどいですね．それではもう１つ紹介します．正弦定理を用いても解くことが可能です．外接円が与えられていることから，正弦定理を用いると**辺の長さをすべて角**（正確には三角比）で考えることが可能になるのです．三角比に持ち込めばいろいろ使える公式が増えますよね！

解３：正弦定理を用いる

弦 AB，BC，CD，DA に対する円周角をそれぞれ θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 とする．ただし

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=180^\circ$$

である．正弦定理より

$$\mathrm{AB}=2R\sin\theta_1,\ \mathrm{BC}=2R\sin\theta_2,\ \mathrm{CD}=2R\sin\theta_3,\ \mathrm{DA}=2R\sin\theta_4$$
$$\mathrm{AC}=2R\sin(\theta_1+\theta_2),\ \mathrm{BD}=2R\sin(\theta_1+\theta_4)$$

となるので，題意を示すには

$$\sin\theta_1\sin\theta_3+\sin\theta_2\sin\theta_4=\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_4)$$

が成り立つことを示せばよい．積→和の公式より

$$\begin{aligned}\sin\theta_1\sin\theta_3&=-\frac{1}{2}\left\{\cos(\theta_1+\theta_3)-\cos(\theta_1-\theta_3)\right\}\\\sin\theta_2\sin\theta_4&=-\frac{1}{2}\left\{\cos(\theta_2+\theta_4)-\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}\\&=-\frac{1}{2}\left\{-\cos(\theta_1+\theta_3)-\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}\quad(\because\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=180^\circ)\end{aligned}$$

であるから

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_3)+\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}$$

となる．

また

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_4)=-\frac{1}{2}\left\{\cos(2\theta_1+\theta_2+\theta_4)-\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\cos\left\{180^\circ+(\theta_1-\theta_3)\right\}-\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_3)+\cos(\theta_2-\theta_4)\right\}$$

であるから左辺と右辺が等しいことが示せた．

解４：複素数平面を用いる

A，B，C，D を複素数平面上の点 α，β，γ，δ とすると，題意を示すには

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma|=|\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

が成り立つことを示せばよい．ここで

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta+(\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\delta+\gamma\delta)$$
$$=\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\gamma+\gamma\delta$$
$$=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

が成り立つので，両辺を $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$ で割って

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}+\frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}=1 \iff \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}+\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}=1$$

となる．ここで，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) は同一円周上にあるので

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}$$

であるから

$$\arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}+\arg\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}=0 \quad\cdots\cdots(*)$$

となり，同様に

$$\arg\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}+\arg\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}=0$$

であるから，$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$，$\dfrac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}$ は共役複素数，同様に $\dfrac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}$，$\dfrac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}$ も共役複素数となるので

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta},\ \frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}$$

は正の数となる．ゆえに

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}+\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}\right|=\left|\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}\right|+\left|\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}\right|$$

となるので

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}\right|+\left|\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}\right|=1 \iff |\beta-\alpha||\gamma-\delta|+|\delta-\alpha||\gamma-\beta|=|\gamma-\alpha||\delta-\beta|$$

より示せた．

《解説》

いかがでしょうか？意外に式だけ見るとめんどくさいのですが，やっていることは至ってシンプルです．ポイントは２つあります．１つは (＊) のついた部分です．複素数の偏角について

$$\arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$$ は AB を点 A を中心に回転し AC に重ねるときの回転角

$$\arg\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}$$ は DC を点 D を中心に回転し DB に重ねるときの回転角

を表すので，回転の方向が逆になること，角（偏角と混同しないように！）が等しいことからから和が 0 となります．もう１つは三角不等式についてです．一般的に

$$|x+y| \leqq |x|+|y|$$

を**三角不等式**といいます．等号が成り立つのは x，y が同符号のときで，証明では等号が成り立つときを示したいので，同符号であることを確認しています．あとは絶対値の有名な変形を用いています．

$$|xy|=|x||y|,\ \left|\frac{y}{x}\right|=\frac{|y|}{|x|}$$

はよく用いますよね．そして，これらのことから以下のことがわかります．

> 一般的な四角形 ABCD において
>
> AB・CD＋AD・BC ≧ AC・BD
>
> が成り立つ．（トレミーの不等式）

もちろん，等号が成り立つのは四角形 ABCD が円に内接する場合です．

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}+\frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right| \leqq \left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}\right|+\left|\frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right|$$

$$\iff \left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}\right|+\left|\frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right| \geqq 1$$

$$\iff |(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)| \geqq |(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)|$$

から容易に証明可能です．

今回はここまでにしましょう．新課程で複素数平面を習っているみなさんはよく解４を確認しておいてください．次回も複素数平面を使う問題を載せるかもしれません．