強者の戦略

数学科の竹本です．解答編です．今回は

・複素数平面上の円

・実数条件

がテーマとなります．早速確認していきましょう！

数学第４問（III）

複素数の偏角はすべて 0 以上 2π 未満とする．

$\alpha = 2\sqrt{2}(1+i)$ とし，等式 $|z-\alpha| = 2$ を満たす複素数 z を考える．z の中で偏角が最大となるものを β とおく．$1 \leqq n \leqq 100$ の範囲で，β^n が実数になる整数 n の個数を求めよ．

《考え方》

まず注目したいのが $|z-\alpha| = 2$ です．これをみたときに z が表す点は円上にあるとわかりましたか？基本の確認からしていきましょう．中心 C，半径 r の円上の点を P とすると $\mathrm{CP} = r$ となります．ここで，複素数平面上の点 C に対応する複素数を α，点 P に対応する複素数を z とすると

$$\mathrm{CP} = |z-\alpha|$$

となります．ベクトルで考えるとイメージがつかみやすいと思います．

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に z，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に α を対応させるとちょうど同じ形になりますね！今回の場合は

点 A(α) を中心とする半径 2 の円周上に点 P(z) がある

ということです．β は OP と実軸の正の部分とのなす角が最大となるものであるから図形的に考えることができます．もちろん，円と直線が出てくるので引く補助線は明らかですよね！ β の位置が明らかになったら実数条件を考えましょう .z が実数であるための必要十分条件は

1　$z = \overline{z}$

2　$\arg z = k\pi$　(k : 整数)

が成り立つことを覚えておけば十分でしょう．

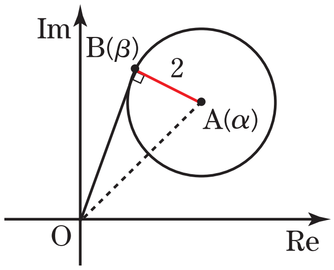
《解答》

複素数平面上で α が表す点を A，z が表す点を P とすると $|z-\alpha|=2$ より，点 P は点 A を中心とする半径 2 の円周上にある．ゆえにグラフより β が表す点を B とすると，B は O から円に引いた接線の接点のうち y 軸に近い方である．ここで

$$\alpha=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，三角形 AOB において AB$=2$，OA$=4$，$\angle$OBA$=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$$



であるから

$$\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{6} \iff \arg\beta-\arg\alpha=\frac{\pi}{6}$$
$$\iff \arg\beta=\frac{5}{12}\pi$$

である．β^n が実数になる条件は $\arg\beta^n$ が π の整数倍となるときより

$$\arg\beta^n=n\arg\beta=\frac{5n}{12}\pi\ ,\ 1\leqq n\leqq 100$$

より

$$n=12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\ 84,\ 96$$

の <u>8 個</u>である．

～おわりに～

この問題は結構有名な問題なのでしっかりと理解している人であればそこまで難しくはないと思います．今回は偏角について問われていましたが，z の絶対値が最大・最小となるときが問われることもあります（OA と円の交点のうち遠い方と近い方が答え）．現高 2 のみなさんの過程では数学 III にあるのでセンター試験では出題されませんが，一通り習い終えた方は基礎学力がついているかどうかの確認も含めて 1997 年 ~2005 年までのセンター試験の過去問をやってみてはいかがでしょうか？次回からは本格的な複素数平面の問題に取り組みますので幅広く理解しておきましょう．