強者の戦略

数学科の川﨑です．2013 年度私から出題する最後の問題になります．ということで重ための問題を準備しました．「評価の感覚」を磨いてください．

第 1 問（数 III）

$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする．$a_1=1$ とし，順に

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx \quad (m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める．

(1)　$m \geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$ となることを示せ．

(2)　$\dfrac{1}{2013}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ．

Hint : 必要であれば，以下の定理は証明なしに使っても構いません．

＜定理＞

関数 $f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続であれば，$f(x)$ はこの区間に最大値 M をもつ．