それでは，前回の解答です．

第 1 問（数Ⅲ）

$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする．$a_1=1$ とし，順に

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx \quad (m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める．

(1)　$m \geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$ となることを示せ．

(2)　$\dfrac{1}{2013}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ．

＜解答＞

(1)　$x>0$ で $0<f(x)<1$ であることと，$f(x)$ の連続性より

$$0 \leqq f(0) \leqq 1$$

である．

$m \geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$m=2$ のとき

$0 \leqq x \leqq a_1\,(=1)$ において

$f(x) \geqq 0$

である．この等号は常には成立しないので

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_0^{a_1} f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx \\ &> \int_0^1 0\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．

(ii)　$m=k$ (k は 2 以上のある自然数) のとき，$a_k>0$ と仮定する．すると，$0 \leqq x \leqq a_k$ において $f(x) \geqq 0$ であり，この等号は常には成立しないので

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \int_0^{a_k} f(x)dx \\ &> \int_0^{a_k} 0\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．よって，$m=k+1$ のときも成立する．

以上 (i)，(ii) より，$m \geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であることが示された．

さらに，l を自然数とするとき，$0 \leqq x \leqq a_l$ で $0 \leqq f(x) \leqq 1$ であり，この等号は常には成立しないので

$$\begin{aligned} a_{l+1} &= \int_0^{a_l} f(x)dx \\ &< \int_0^{a_l} 1\,dx \\ &= a_l \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$m \geqq 2$　に対し

$$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$$

となる．

(2)　すべての自然数 m に対して

$$a_m \geqq \frac{1}{2013}$$

が成り立つと仮定して矛盾を導く．

今，$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2013}$ となる ε を 1 つとり，閉区間 $\varepsilon \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M とする．($f(x)$ の連続性から，このような M がとれる)

すると

$$0<M<1 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

仮定より $\varepsilon<a_m \leqq a_1=1$ であるから

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \int_0^{a_m} f(x)dx \\ &= \int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{a_m} f(x)\,dx \\ &< \int_0^{\varepsilon} 1\,dx+\int_{\varepsilon}^{a_m} M\,dx \\ &= \varepsilon+M(a_m-\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\therefore\ a_{m+1}-\varepsilon<M(a_m-\varepsilon) \quad (m=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$$

となる．m が十分大のとき，この不等式を繰り返し用いて

$$(0<)\,a_m-\varepsilon<M(a_{m-1}-\varepsilon)$$
$$<\cdots\cdots$$
$$<M^{m-1}(a_1-\varepsilon)$$

となり，$(*)$ より

$$\lim_{m\to\infty}M^{m-1}(a_1-\varepsilon)=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty}(a_m-\varepsilon)=0$$

$$\therefore\ \lim_{m\to\infty}a_m=\varepsilon$$

となる．ところが

$$\varepsilon<\frac{1}{2013}\leqq a_m$$

であるから，a_m が収束するとき

$$\varepsilon<\frac{1}{2013}\leqq\lim_{m\to\infty}a_m$$

が成り立つので，これは矛盾である．

よって題意が成り立つことが示せた．

□

＜コメント＞

数学科の川﨑です．新年明けましておめでとうございます．今年もこのHPをよろしくお願いします．

さて，昨年終わりに出題していたこの問題ですが，手が出せたでしょうか？やや高校数学を逸脱したところもあるので，その部分に関しては出題時にヒントをつけました．難しく重たい“お年玉”だったかもしれませんが，思考力を鍛えることのできる問題ですので，手が出なかった人は以下の解説を読んで，もう一度じっくり考えてみてください．

以下設問ごとの補足です．

(1)　$f(x)$ が具体的に与えられていません．このような抽象関数の問題では，$f(x)$ を決めにかかるのはNGです．ひどいものになると，$f(x)$ を多項式と決めつけて証明しようとする答案などもありますが論外です．条件を満たすすべての $f(x)$ に対して成り立つことを示さなければならないわけですから，広く普遍的に使える方法で攻めることになります．

積分を具体的に計算するのは不可能なので，「積分の不等式」を利用して証明することになります．不等式の作り方を確認しておきましょう．

> (☆)　連続関数 $F(x)$，$G(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ で
> $$F(x)\leqq G(x)$$
> を満たすとき
> $$\int_a^b F(x)dx\leqq\int_a^b G(x)dx$$
> が成り立つ．等号は，$a\leqq x\leqq b$ で恒等的に $F(x)=G(x)$ であるときに限り成立する．

鍵になるのは，$x>0$ で $0<f(x)<1$ という条件です(というかこれしか条件がありません)．連続性から

$$0\leqq f(0)\leqq 1$$

となることにも注意しましょう．

積分区間が $x\geqq 0$ のところであれば

$$0\leqq f(x)\leqq 1$$

が使えるので，まず $a_m>0$ を示します．漸化式を(解かずに)使うので，帰納法でやるところです．帰納法で $a_k>0$ を仮定しておくことで，積分区間 $0\leqq x\leqq a_k$ 内で $f(x)\geqq 0$ と言え，これから $a_{k+1}>0$ が示せます．

$a_m>0$ が示せたら，次は $f(x)\leqq 1$ を使って $\{a_m\}$ が減少列であることを示します．これも先ほどの「積分の不等式(☆)」を使って示します．

このように，関数 $f(x)$ を定数で評価することができる場合には，(☆)の不等式の作り方が有効な場合が多いです．しっかりマスターしましょう．

(2)　問題文にある通り，背理法で示します．「ある m で $\dfrac{1}{2013}>a_m$ となる」を示したいので，それを否定した「すべての m で $\dfrac{1}{2013}\leqq a_m$ となる」として矛盾を導くことになります．

$f(x)$ の積分を計算するのは(1)に引き続き不可能なので，$f(x)$ を評価することを考えます．ヒントにあったように，連続関数 $f(x)$ は閉区間内で

最大値を持ちます．この最大値がそこまで大きくなれないことがポイントです．例えば，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M' とすると

$$0 \leqq x \leqq a_m \leqq 1$$

に注意して

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \int_0^{a_m} f(x)\,dx \\ &\leqq \int_0^{a_m} M'\,dx \\ &\leqq M' a_m \end{aligned}$$

が得られます．これを繰り返し用いると

$$(0<)\ a_m \leqq M'^{m-1} a_1$$

となるので，M' の絶対値が 1 より小さければ数列 $\{a_m\}$ は 0 に収束することになり「すべての m で $\frac{1}{2013} \leqq a_m$ となる」に矛盾します．これでうまくいったように見えるのですが，$f(0)=1$ の場合，$M'=1$ となり失敗です．その部分を解決するために，＜解答＞では $0<\varepsilon<\frac{1}{2013}$ となる ε をとりました．積分区間を $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ の部分と $\varepsilon \leqq x \leqq 1$ の部分とに分けることで「0 を隔離」して，$f(x)$ を 1 未満の定数で評価できるようにしています．このように，「危険な点」がある場合，そこを分けて議論することでうまくいく場合があります．うまくいかない原因は何か，それを解決するにはどうしたらいいかを考えてください．不等式

$$a_{m+1}-\varepsilon < M(a_m-\varepsilon)$$

が得られれば，ここから先はお決まりのはさみうちの原理で極限を求める形になります．a_m が ε に収束することが示されるので，そこから矛盾を導くことができます．

本問の原題は $\frac{1}{2013}$ のところが $\frac{1}{2002}$ でした (出題年度です)．この数字に数学的な意味は無く，どんなに小さい定数に代えても，同様にして矛盾を導くことができます．

それでは，最後に恒例の練習問題です．今回は極限を予想して，その極限値をとることを示す問題を出しておきます．(3) は場合分けが要りますので，どんな場合があるかを考えてください．

問

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする．

(1) $0<x<1$ ならば，$0<f(x)<1$ となることを示せ．

(2) $f(x)-x=0$ となる x をすべて求めよ．

(3) $0<\alpha<1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\alpha$，$a_{n+1}=f(a_n)$（$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ ）とする．α の値に応じて，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

＜解答＞

(1) $0<x<1$ とする．

$$f(x)>0$$

は明らかである．また

$$1-f(x)=\frac{1-x^2}{2x^2+1}>0$$

である．よって

$$0<f(x)<1$$

が成り立つ．

(2)

$$\begin{aligned} f(x)-x=0 &\iff \frac{3x^2}{2x^2+1}-x=0 \\ &\iff 2x^3-3x^2+x=0 \\ &\iff x(2x-1)(x-1)=0 \\ &\therefore\ x=0,\ \frac{1}{2},\ 1 \end{aligned}$$

である．

(3)

$$f(x)-x=-\frac{x(2x-1)(x-1)}{2x^2+1}$$

であるから

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

であり

$$0<x<\frac{1}{2} \text{ のとき } 0<f(x)<x \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{2}<x<1 \text{ のとき } x<f(x)<1 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ

(i)　$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき

①を繰り返し用いて

$$0<\cdots\cdots<a_n<\cdots\cdots<a_2<a_1=\alpha \quad \cdots\cdots ③$$

である．また

$$a_{n+1}=\frac{3a_n^2}{2a_n^2+1}=\frac{3a_n}{2a_n^2+1}a_n$$

である．ここで

$$g(x)=\frac{3x}{2x^2+1}$$

とおくと，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において

$$g'(x)=\frac{3(2x^2+1)-12x^2}{(2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{3(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}>0$$

より $g(x)$ は単調に増加するので，③より

$$g(0)<g(a_n)\leqq g(\alpha)<g\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

が成り立つ．よって，$g(\alpha)=r\ (0<r<1)$ として

$$a_{n+1}<ra_n$$

がすべての自然数 n で成り立つので，この不等式を繰り返し用いて

$$(0<)\ a_n<ra_{n-1}<\cdots\cdots<r^{n-1}a_1$$

を得る．$0<r<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}r^{n-1}a_1=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

である．

(ii)　$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$a_n=\frac{1}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

である．

(iii)　$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ のとき

②を繰り返し用いて

$$\alpha=a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n<\cdots\cdots<1 \quad \cdots\cdots ④$$

である．また

$$1-a_{n+1}=\frac{a_n+1}{2a_n^2+1}(1-a_n)$$

である．ここで

$$h(x)=\frac{x+1}{2x^2+1}$$

とおくと，$\dfrac{1}{2}<x<1$ において

$$h'(x)=\frac{2x^2+1-(x+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1-4x-2x^2}{(2x^2+1)^2}<0$$

より，$h(x)$ は単調に減少するので，④より

$$0<h(1)<h(a_n)\leqq h(\alpha)<h\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

が成り立つ．よって，$h(\alpha)=s\ (0<s<1)$ として

$$1-a_{n+1}<s(1-a_n)$$

がすべての自然数 n で成り立つので，この不等式を繰り返し用いて

$$(0<)\ 1-a_n<s(1-a_{n-1})$$
$$<\cdots\cdots<s^{n-1}(1-a_1)$$

を得る．$0<s<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}s^{n-1}(1-a_1)=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

である．

＜解答終＞

それでは今回はここまでにしたいと思います．

受験生はいよいよ本番が近づいてきましたね．体調には十分注意して，本番でベストのパフォーマンスが発揮できるように，最後の詰めを頑張ってください．嬉しい結果の報告をお待ちしています．

受験生でない人も新学年に向けての助走期間が始まっています．良いスタートが切れるよう，この時期気を引き締めて勉強してください．

（数学科　川﨑）