強者の戦略

　今回の問題は，1998 年度に山梨医科大学（現在の山梨大学医学部）で出題された問題からの抜粋です．新課程においては，数学 A の場合の数・確率の単元からは期待値が外されましたので，今回の問題のように，期待値ではなく確率がなるべく大きくなるように振る舞うための条件を考える問題が復活するかもしれないと思い，取り上げさせていただきました．それではまず，問題の確認から．

問題

　研伸館の数学の講師で構成された M チームと，研伸館でテニスが大好きな講師が率いる F チームが，テニスの試合で対戦することになった．F チームは強力な A，B 両選手を擁しているが，M チームは比較的 5 人の力がそろっていて，M チームの T，U，V，W，X の各選手が F チームの A，B，C，D，E の各選手とシングルスで対戦して勝つ確率はそれぞれ次の表の通りであるとする．

選手＼相手	A	B	C	D	E
T	0	p	q	q	1
U	0	p	q	q	1
V	0	0	r	r	1
W	0	0	s	s	q
X	0	0	s	s	q

（ただし，$p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{3}{4}$，$r=\frac{2}{3}$，$s=\frac{1}{2}$ とする．）

両チームのそれぞれ 5 人の選手がシングルスに 1 度ずつ出場して対戦し，先に 3 人が勝った方のチームを勝ちとする団体戦が行われるものとし，F チームのオーダーについて「A は 1 番または 2 番に，B は 3 番または 4 番に，E は 5 番に出る」という確かな情報があるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　T と U および W と X を区別しない（T および W が 2 回ずつ，V が 1 回出ると考えてもよい）とき，M チームのオーダーは何通りあるか．

(2)　T と U，W と X，1 番と 2 番および 3 番と 4 番を区別しないとき，M チームのオーダーは何通りあるか．

(3)　M チームがどのようなオーダーにするとき，勝つ確率が最大となるか，その理由も述べよ．また，その確率はいくらか．

　まず，(2) までの解答を確認しましょう．

［解答］

(1)　出場する順番の 1 番から 5 番に，T，T，V，W，W を対応させると考えて，求めるオーダーの数は

$$ {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 5 \cdot 6 = 30 \quad （通り） $$

である．

(2)　（1 番 2 番），（3 番 4 番），5 番の 3 つのグループに，T，T，V，W，W を分けることを考える．誰を 5 番に分けるかで場合分けをすると，残りの 4 人から（1 番 2 番）に分ける 2 人を決めれば，（3 番 4 番）に分ける 2 人は 1 通りに決まることに注意して

(i)　5 番が T のとき

（1 番 2 番）は TV，TW，VW，WW の 4 通り

(ii)　5 番が V のとき

（1 番 2 番）は TT，TW，WW の 3 通り

(iii)　5 番が W のとき

（1 番 2 番）は TT，TV，TW，VW の 4 通り

ある．以上より，求めるオーダーの数は

$$ 4+3+4=11 \ （通り） $$

である．

［解答ここまで］

　(1)，(2) までは悩むことなく解けたと思いますが，(3) において確率を考えるべきオーダーは，本質的に (2) で考えた 11 パターンだけでよい，という誘導になっていることに気づくことが重要です．

　続いて，(3) の解答に移りましょう．

［解答続き］

(3)　M チームの任意のオーダーは，団体戦に勝つ確率を考えるとき，(2) で考えた 11 通りのオーダーのいずれかと対応する．よって以下，(2) の 11 通りのオーダーのときの団体戦に勝つ確率を考える．

まず，F チームの E と対戦する，つまり，5 番目に出場する人について考えると，E に勝つ確率は T も V もともに 1 であり等しいが，B，C，D に勝つ確率は T のほうが V よりも大きいので，T と E が対戦するとき，つまり，T が 5 番目に出場するときに M チームの勝つ確率が最大になることはない．よって，5 番目に出場する選手は V か W であることが必要である．

[解答ここまで]

まず，場合の数・確率は

条件のきつい，極端なところから考える

ようにすると，問題の条件に合う状況を絞り込むことができ，場合分けを少なくすることができます．

今回の場合は，勝つ確率がまとめられた表の中に「1」と「0」があるので，ここに注目しましょう（実際の試合では，絶対に勝つ，ということは一応あり得ないわけで，この確率はかなり極端なもののハズ）．さらに，今回は 3 勝以上するときの確率を考えたいので，勝利数が多くなるような「1」の確率に注目します．

ただ，この問題の普通と違って難しいところは，勝つ確率が極端な E との対戦だけではなく，確率が q と r で差がついている C または D との対戦の確率まで考えてようやく，求めるオーダーに合わないものを除外できるところでしょう．

加えて，W が E と対戦する場合は，E に勝つ確率は「1」よりも小さい q となりますが，他の 4 人との対戦オーダーを上手に調整することで確率を大きくすることができるかもしれませんから，ここだけでは W が E と対戦する場合を除外できないことにも注意して下さい．

では，解答の続きを見てみましょう．

[解答続き]

このとき (2) より，考えるべきオーダーは 7 通りであり，それぞれに以下のように①～⑦で名前をつける．

名前	1 番 2 番	3 番 4 番	5 番
①	TT	WW	V
②	TW	TW	V
③	WW	TT	V
④	TT	VW	W
⑤	TV	TW	W
⑥	TW	TV	W
⑦	VW	TT	W

以下，それぞれのオーダーについて，M チームが F チームに 3 勝以上できるような確率を考える．（1 番 2 番）のうち A と対戦する者は勝てないので，この 2 戦で得られる勝ち数は 1 または 0 である．よって，ここで得られる勝ち数とそれぞれの確率は以下のようになる（具体的な計算は，最後にある (*) の部分を参照のこと）．

選手＼勝ち数	1	0
TT	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
WW	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
TV	$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$
TW	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$
VW	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

次に，(3 番 4 番）において得られる勝ち数は 2, 1, 0 のいずれかであるから，勝ち数とそれぞれの確率は以下のようになる（具体的な計算は，最後にある (**) の部分を参照のこと）．

勝ち数 選手	2	1	0
TT	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$
WW	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
TV	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
TW	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$
VW	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

さらに, 5 番においては, V のときは必ず 1 勝し, W のときは

1 勝の確率：$\frac{3}{4}$

0 勝の確率：$\frac{1}{4}$

となる .

以上の確率を元にして，①〜⑦の各オーダーの場合に M チームが 3 勝以上する確率を考える.

①のときは,（3 番 4 番）で 2 勝できないので,（1 番 2 番),（3 番 4 番)，5 番で (TT，WW，V) がそれぞれ 1 勝ずつするときのみであり，その確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{8}$$

である.

②のときは,（3 番 4 番）で 2 勝できる可能性があり，かつ，5 番で必ず 1 勝するので,（1 番 2 番),（3 番 4 番)，5 番で (TW，TW，V) の勝ち数が (1，1，1),（0，2，1),（1，2，1) のいずれかとなるときである．よって，その確率は

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot 1+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot 1=\frac{29}{64}$$

である.

③のとき，②と同様に考えて確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

である.

④のとき，①と同様に考えて確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{64}$$

である.

⑤のとき,（3 番 4 番）で 2 勝できる可能性があり，かつ，（1 番 2 番）と 5 番では，それぞれ 0 勝か 1 勝のいずれかなので，（1 番 2 番)，（3 番 4 番)，5 番における (TV，TW，W) の勝ち数が

(1，1，1)，(0，2，1)，(1，2，1)，(1，2，0)

のいずれかのときである．よって，その確率は

$$\frac{17}{24}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}+\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}+\frac{17}{24}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}+\frac{17}{24}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{599}{1536}$$

である.

⑥，⑦のとき，⑤と同様に考えて，それぞれの確率は

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}=\frac{149}{384}$$

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{113}{256}$$

である.

以上より，M チームが勝つ確率を最大とするオーダーは③である．よって，求めるオーダーは

WXTUV
WXUTV
XWTUV
XWUTV

であり，このときの M チームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である.

［解答の補足］

(*)（1 番 2 番）での，勝ち数に対する確率の計算

・TT のとき

1 勝となるのは A と戦わない者が勝つとき

0 勝となるのは 1 勝とならないとき

であるから，確率はそれぞれ

$$1\cdot q=\frac{3}{4}$$

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

となる．

・WW のとき

TT のときと同様に考えて，確率はそれぞれ

1 勝：$1\cdot s=\dfrac{1}{2}$

0 勝：$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

となる．

・TV のとき

「T が A と戦い，V が C または D と戦う」

「T が C または D と戦い，V が A と戦う」

の 2 つの場合は同様に確からしいので，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で起こる．この 2 つの場合に分けて考えると，1 勝，0 勝の確率はそれぞれ

1 勝：$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot r+\dfrac{1}{2}\cdot q\cdot 1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{17}{24}$

0 勝：$1-\dfrac{17}{24}=\dfrac{7}{24}$

となる．

・TW のとき

TV のときと同様に考えると，それぞれの確率は

1 勝：$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot s+\dfrac{1}{2}\cdot q\cdot 1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{8}$

0 勝：$1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}$

となる．

・VW のとき

TV のときと同様に考えると，それぞれの確率は

1 勝：$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot s+\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot 1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{7}{12}$

0 勝：$1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$

となる．

(**)（3 番 4 番）での，勝ち数に対する確率の計算

・TT のとき

B と戦う者と C または D と戦う者を分けて考えると，確率は

2 勝：$pq=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$

1 勝：$p(1-q)+(1-p)q=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$

0 勝：$1-\dfrac{3}{16}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{16}$

となる．

・WW のとき

B には勝てないので 2 勝の確率は 0 である．また

1 勝となるのは B と戦わない者が勝つとき

0 勝となるのは 2 勝，1 勝とならないとき

であるから，確率はそれぞれ

1 勝：$1\cdot s=\dfrac{1}{2}$

0 勝：$1-0-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

となる．

・TV のとき

V は B に勝てないので，2 勝となるのは T が B と戦って勝ち，V が C または D と戦って勝つときである．また

「T が B と戦い，V が C または D と戦う」

「T が C または D と戦い，V が B と戦う」

の 2 つの場合は同様に確からしいので，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で起こる．よって 2 勝の確率は

$$\frac{1}{2}pr=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

である．0勝となるときも，先に挙げた2つの場合に分けて考えると，その確率は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot(1-r)+\frac{1}{2}\cdot(1-q)\cdot1\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot1\right)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である．1勝となるときは上の2つの余事象ゆえ，その確率は

$$1-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

となる．

・TWのとき

Wが B に勝てないので，TVのときと同様に考えると，それぞれの確率は

$$2勝：\frac{1}{2}ps=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned}0勝：&\frac{1}{2}(1-p)(1-s)+\frac{1}{2}(1-q)\cdot1\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot1\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

$$1勝：1-\frac{1}{16}-\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

となる．

・VWのとき

Bには勝てないので2勝の確率は0である．また，

「VがBと戦い，WがCまたはDと戦う」

「VがCまたはDと戦い，WがBと戦う」

の2つの場合は同様に確からしいので，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で起こる．よって，0勝の確率は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1-s)+\frac{1}{2}(1-r)\cdot1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

である．1勝となるときは上の2つの余事象ゆえ，その確率は

$$1-0-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

である．

[解答の補足ここまで]

[解答ここまで]

（補足説明）

オーダーを7パターンに絞り込んだ後は，丁寧に確率を計算していくことになります．今回は，「強者の皆さんであれば必要な部分のみ，選んで読むことができるだろう」と考えて，すべての計算を掲載していますが，大学入試の答案を書く際には，少し迷ってしまうかもしれませんので，以下に1つの目安を示します．

実際の大学入試の答案では，まず，（解答の補足）以外の部分を優先して書くとよいでしょう．この問題で注目すべきは「3勝以上するときの確率」なので，最後の①から⑦の確率を求める部分については，メインテーマということで，省略せずに書くのがよいと思います．そして，見直し後，時間に余裕があるのであれば，（解答の補足）の部分を補っていくのがよいでしょう．特に（3番4番）のところの勝ち数に対する確率においては，意外と「同様に考えると」では片付かない部分があるので，書くと決めたのであれば，端折らずに丁寧に書きましょう．

さて，この問題によって，強力な選手を擁していないチームであっても，事前にしっかりと作戦を練れば，十分に勝利を狙える戦いができることがわかりました．ただ，今回のように確率を高めることができたのは，「相手チームのA，B，Eの出場オーダーが，ある程度ハッキリわかっている」からに他なりません．勝てない相手になるべく弱いこちらの選手を当てたり，弱い相手にはなるべくこちらも弱い選手で勝ち数を取りにいく（Eから勝ち数を取りにいくときに，Tで勝ちにいくよりもVで勝ちにい

くほうが全体で見たときに有利になる)，などの作戦を取ることができたからこその，五分の勝率と言えるでしょう．

これと同じことが人生における他の勝負どころ，もっと限定すれば大学入試においても言えると思うのです．事前に過去問を研究したり，オープンキャンパスに行ってモチベーションを高めたり，大学のアドミッションポリシーを正しく把握して推薦入試の面接に活かしたり……事前の準備が万端な人ほど有利になることは明らかです．

以前の問題では，勝負は先手必勝，と学びました．

今回は，勝負は事前のデータ収集が大事，ということが分かりました．データの収集にも，もちろん時間がかかりますから，早めに動き出すことが大切です．

今現在，やるかやらないかで迷っていることがあるならば，まず動いてみてはどうでしょうか．

（数学科　中西）