強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（数Ⅲ）

実数 x および自然数 n に対して

$$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) x の値を決めると，$2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}$ の値は，n と無関係に一定であることを証明せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ を証明せよ．

＜解答＞

(1) $$a_{n+1}=a_n\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}$$

に注意すると，自然数 n に対して

$$\begin{aligned}&2^{n+1}a_{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\\&=2^n a_n\cdot 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\&=2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}&=2^1a_1\sin\frac{x}{2^1}\\&=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=\sin x\end{aligned}$$

である．

よって，x の値を決めると，$2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}$ の値は n と無関係に一定である．

(2) $0<x<\pi$ とする．このとき, $k=1$，2，……，n に対して

$$\cos\frac{x}{2^k}>0,\ a_n>0$$

であるから

$$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

の両辺の自然対数をとって

$$\log a_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\cos\frac{x}{2^k}\right)$$

である．この両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dx}\left(\log a_n\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

また，(1) より

$$2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}=\sin x$$

であるから，$\sin\frac{x}{2^n}>0,\ \sin x>0$ に注意して

$$\log a_n=\log(\sin x)-\log\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)-\log 2^n$$

である．この両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\log a_n\right)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}\quad\cdots\cdots②$$

である．①，② より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{\cos x}{\sin x}$$

が成り立ち，さらに $x=\frac{\pi}{2}$ として

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$\iff 2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\iff \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{\frac{\pi}{2^N}}{\sin\frac{\pi}{2^N}}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2^N}$$

$(N=n+1)$

であるから

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^N}}{\sin\frac{\pi}{2^N}}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2^N}$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

である．

□

※　(2) は (1) を無視して次のように解くこともできます．

＜(2) の別解＞

まず，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ において

$$\frac{1}{\tan\theta}-\frac{2}{\tan 2\theta}=\tan\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

を示す．

実際，$(*)$ の左辺を倍角の公式を使って変形すると

$$\frac{1}{\tan\theta}-\frac{2}{\tan 2\theta}=\frac{1}{\tan\theta}-\frac{2(1-\tan^2\theta)}{2\tan\theta}$$
$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}$$
$$=\tan\theta$$

となる．

$(*)$ で

$$\theta=\frac{\pi}{2^k}\quad (k=3,\ 4,\ \cdots\cdots, n)$$

として (ただし，n は十分大)

$$\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2^k}}-\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}}$$

であり，両辺を $\frac{1}{2^k}$ 倍することで

$$\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{2^k\tan\frac{\pi}{2^k}}-\frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}}$$

となる．これを，$k=3$，4，……，n で足して

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}$$
$$=\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\frac{\pi}{2^k}}-\frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}}\right)$$
$$=\frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^n}}-\frac{1}{2^2\tan\frac{\pi}{2^2}}$$
$$\therefore\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^n}}$$
$$=\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\tan\frac{\pi}{2^n}}\cdot\frac{1}{\pi}$$

である．よって

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\tan\frac{\pi}{2^n}}\cdot\frac{1}{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

である．

□

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今年度もよろしくお願いします．１問目は，三角関数を使った極限の問題でした．完答するまでには，三角関数の公式をしっかりおさえることと，(1) を (2) に利用する発想力が必要です．解けなかった人は，自分に何が足りないかを確認して，次に活かしてください．

以下，設問ごとの補足です．

(1)　a_n は $\cos\frac{x}{2^{\bullet}}$ の積で表されています．角度の分母が 2 の冪なので，倍角や半角の公式できれいになるんだろうなというのがまず最初に思ってほしいところです．問題の指示通りに $2^n\sin\frac{x}{2^n}$ を掛けてみると

$$\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

(sin の倍角の公式)

を使って，因数を一つ減らせることが分かります．すると，お次は

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-2}}$$

として，さらに因数が一つ減ります．後はお分かりですね．sin と cos がどんどんくっついて，最終的には $\sin x$ だけが残ります．某パズルゲームで連鎖していって最後にきれいな形だけが残ったときと似た感動を味わうことができます．2^n をかけたのは，繰り返し出てくる $\dfrac{1}{2}$ をすべて相殺するためなのも確認しておいてください．

解答では，a_{n+1} と a_n の関係式を作ることですっきりと一定であることを示しました．

(2)　(1) と似ても似つかない形ですが，どうやって使うのかを考えましょう．

ここで，連想クイズです．

Q1．a_n は cos の積の形ですが，求めるものは tan の和 (の極限) です．「積➡和」で連想するものは？

私の頭の中の引き出しには，この Q1 に対する答えとして，log や相加・相乗平均の関係，(三角関数の) 和積の公式などが入っています．その中から，何がうまくいきそうかを考えるわけですが

「無限積　log をとって　無限和に」

は強者を目指す皆さんなら，必ず 1 度はやったことがあるのではないかと思います．a_n に対して絶対値をつけて，log をとりましょう．

では，次のクイズです．

Q2．$\log|a_n|$ を考えることで，log (cos) の和の形になりました．ここから，tan にもっていくにはどうしますか？

ここまでくれば先が見えますね．これは微分の一択だと思います．実際の入試問題には

「$\log|a_n|$ を微分することで」

というフレーズが，(2) の最初についていました．それでは単なる計算問題になるので，そこを考える訓練をしてもらおうというのが今回の出題の意図です．微分して形を整えることで，求める無限級数の値を得ます．

別解の方は，(∗) の式を知らないと無理ですが，これを証明させてから (2) を解かせる問題も過去に出題例がありますので，(∗) の証明から自力でできるようにしておいてください．

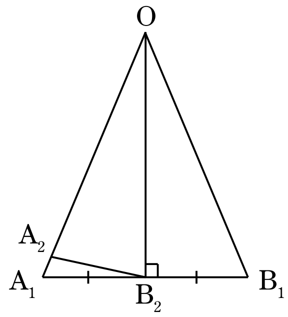
最後に 1 問，練習問題をつけておきます．同じようなテーマで求めることができるので，挑戦してみてください．

問

$OA_1=OB_1=1$，$\angle B_1OA_1=\theta\ (0<\theta<\pi)$ であるような二等辺三角形 OA_1B_1 がある．辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし，辺 OA_1 上に $OA_2=OB_2$ となる点 A_2 をとり，二等辺三角形 OA_2B_2 をつくる．以下同様にして，$n>2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n をつくっていく．

辺 OA_n の長さを a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

＜解答＞



図形を繰り返しつくっていくと

$$\angle B_nOB_{n+1}=\frac{\theta}{2^n}$$

であるから

$$a_{n+1}=a_n\cdot\cos\angle \mathrm{B}_n\mathrm{OB}_{n+1}$$
$$=a_n\cos\frac{\theta}{2^n}$$

である．n が十分大のとき，これを繰り返し用いて

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2}$$

$(\because\ \ a_1=1)$

である．この両辺に $\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ をかけて

$$\begin{aligned}
&a_n\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\\
&=\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2}\\
&=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2}\\
&=\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-3}}\cos\frac{\theta}{2^{n-3}}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2}\\
&=\cdots\cdots\\
&=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\theta
\end{aligned}$$

であるから，$\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}>0$ に注意して

$$a_n=\frac{\dfrac{1}{2^{n-1}}\sin\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}=\frac{\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sin\theta}{\theta}$$

である．

＜解答終＞

a_n の形を見て，$\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ をかけるのが point です．出来ましたか？ θ は定数なので答えに残って構わないのですが，1 と答えてしまう間違いが多いですので気をつけてください．

では，今回はこれぐらいにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）