座標平面の原点を O で表す．線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．

このとき，線分 PQ の通過する領域を D とするとき，D を図示せよ．

《解法の流れ》

点 P の座標を $\left(p,\ \sqrt{3}p\right)$，点 Q の座標を $\left(q,\ -\sqrt{3}q\right)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ の条件から

$$p-q=3$$

が得られるので，文字 q を消すことができ，p，q の範囲に注意して直線 PQ の方程式を立式すると

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}\ (1 \leqq p \leqq 2)$$

となります．求めるものは線分 PQ の通過領域なので，まずは直線 PQ の通過領域を図示し，そこから 2 直線 $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$ の外側を切り取れば良いです（線分 PQ の両端は，必ずこの 2 直線上にあります.）

なので，この問題は最終的には

「実数 p が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲を動くときの，直線

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

の通過領域を求めよ.」

という問題に帰着します．

《通過領域のイメージ》

$1 \leqq p \leqq 2$ を満たす p の値を 1 つ決めるごとに，直線が 1 本定まります．p が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲をくまなく動くとき，無数の直線を考えることになります．その無数の直線を考えた際に，どれか 1 本でもその直線が通っていれば，そこは「通過した」領域とみなします．

上で“領域”という表現を用いましたが，実際に我々が考えているのは“点”です．ある点に関して，直線のどれか 1 本でもその点を通っていれば，そこは「通過した」とみなします．逆に，どの直線も通らない点であれば，そこは「通過しない」点となります．このようにして，通過した点を拾い集めると，ある模様が浮かび上がります．それが，求める通過“領域”です．領域というと，不等式をイメージしそうなものですが，あくまでもこれは，該当する点 $(x,\ y)$ が満たす x，y の条件式について，それが不等式になっているに過ぎません．関係式が等式のときに“軌跡”というのはいいですよね．いずれにせよ，「点」に注目することになります．このイメージを大事にしてください．

《通過領域の考え方》

上記の考えのもと，「通過領域」の求め方を確認していきます. 大きく分けて, 方針は以下の3つです.

(a)　逆像法

パラメータの方程式と見て，実数解条件を考える．

(b)　順像法

x を固定し，パラメータを変数と捉え，y 座標の値域で考える．

(c)　包絡線の利用

パラメータの値に関わらず，扱う図形が必ず接する曲線（包絡線）を利用して直接図示する．

上述のように「点」に注目する解法のうち，最も主流な解法が (a) です．(b) も「点」として考えるものです．(c) はやや裏技的なもので，直線そのものを実際に動かして考えるものです．

この後，3 つの考え方を全て確認して，最後に模範解答をまとめて載せます．

《「(a) 逆像法」の考え方》

この無数の直線を考えるとき，例えば，点 $(0,\ 0)$ は「通過する」点と言えるでしょうか？

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

に $(x,\ y)=(0\ ,\ 0)$ を代入すると

$$0=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\cdot 0-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$\iff\ 0=-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$\iff\ p=0,\ 3$$

となります．何故か p が具体的に求まってしまいました．これは

点 $(0,\ 0)$ を通るような直線は

$p=0,\ 3$ のときにのみ生成される

ことを意味します．$p=0,\ 3$ のときは点 $(0,\ 0)$ を通る直線となり，$p=0,\ 3$ 以外のときは点 $(0,\ 0)$ を通らない直線になるということです．

いま，$1\leqq p\leqq 2$ なので，点 $(0,\ 0)$ は「通過しない」点であると判断できます．

ある点 $(X,\ Y)$ を「通過する」かどうかは，$(x,\ y)=(X,\ Y)$ を代入したときに得られる式：

$$Y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}X-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$\iff\ \sqrt{3}Y=(2p-3)X-2p(p-3)$$
$$\iff\ 2p^2-2(X+3)p+(3X+\sqrt{3}Y)=0$$

を満たす実数 p が $1\leqq p\leqq 2$ に存在するかどうかで判断できます．今回の場合，p の 2 次方程式となるので，この p の 2 次方程式が $1\leqq p\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解を持つかどうかで判断できるとも言えます．そして，実数解を持つための $X,\ Y$ の条件が，「通過する」点 $(X,\ Y)$ が満たす関係式となり，結果としてその式が，通過する点の存在場所を示すことになります．等式であれば軌跡，不等式であれば領域ですね．

慣れてきたら，いちいち文字を置き換えず直線の方程式をそのまま p について整理して

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$\iff\ 2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)=0$$

についての p の実数解条件を考えてもよいです．その際は，$x,\ y$ を一旦定数と見ることになります．この上で，$1\leqq p\leqq 2$ に少なくとも 1 つ実数解を持つための条件を考えれば OK です．

さて，ここからは 2 次方程式の「少なくとも 1 つ」タイプの解の配置問題となりますが，これについては苦手な人が多い問題ですね．色々と場合分けの判断基準があり，解き方が人それぞれであるのも理解が難しいところかもしれません．ここで紹介する，私が推奨する方法は

グラフの端点値の符号に注目

するものです．

$$f(p)=2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)$$

とおくと，今回の端点値は $f(1),\ f(2)$ ですが，この 2 つの値の符号が異符号であれば，必ず $1<p<2$ の範囲に解を持つと言えることは有名事実です．今回は $1\leqq p\leqq 2$ と範囲の端に等号がついているので，$p=1,\ 2$ が解でも構いません．つまり $f(1)=0$ または $f(2)=0$ でも OK です．なので，先ほどの異符号になる場合とまとめて書くと

$f(1)\cdot f(2)\leqq 0$

となります．これが条件の 1 つです．

では，これ以外はどうでしょうか？まだ考えていない場合として，端点値が同符号の場合があります．このうち端点値がともに負の値である場合については，下に凸である放物線の形を想像してもらえれば $1\leqq p\leqq 2$ の範囲に実数解を持つことは不可能と分かるので，端点値がともに正である場合のみとなります．さらにこれは，放物線の形から

$1<p<2$ の範囲に<u>2 つの</u>実数解を持つ

ときと同じになることが分かります．重解でも構いません．これはシンプルなパターンの解の配置ですね．端点値の符号に加え，頂点の y 座標と軸の位置も必要になってくるケースです．

そして先ほど同様，$p=1$，2 も範囲に含まれることから

　　$1 \leqq p \leqq 2$ の範囲に 2 つの実数解を持つ

と等号をつけて考えることにより

　　頂点の y 座標 $\leqq 0$（判別式 $D \geqq 0$ でも可）

　　$1 \leqq$ 軸 $\leqq 2$

　　端点値：$f(1) \geqq 0$

　　端点値：$f(2) \geqq 0$

とできます．

無論，等号をつけている関係で先ほどの場合とのダブりが存在することになりますが，排反に分けようと努めることの方がミスを招く可能性が高くなります．ダブっていても最終的に 2 つの場合を「または」で繋ぐので大丈夫と割り切り，ザックリといきましょう．

まとめると，求める条件は

　　(i)　$f(1) \cdot f(2) \leqq 0$

または

　　(ii)　頂点の y 座標 $\leqq 0$

　　　　$1 \leqq$ 軸 $\leqq 2$

　　　　端点値：$f(1) \geqq 0$

　　　　端点値：$f(2) \geqq 0$

となります．

　　(i)：実数解が 1 個のとき

　　(ii)：実数解が 2 個のとき

と分類できそうな気もしますが，この立式では (i) の場合に実数解が 2 個のときも含まれたりしますので，表現としては嘘になります．ですので，排反な場合分けの見出しのようなことは書かずに，しれっと立式のみを書いておく方が無難です．

なお，この端点値の符号に注目して分ける方法は，最も処理が厄介である

　　等号なしの少なくとも 1 つタイプ

　　（例：$1<p<2$ の範囲に少なくとも 1 つ）

に力を発揮します．話が逸れ過ぎるでこれ以上は控えますが，余裕がある人は確認してみてください．

（(a) の考え方はここまで）

《「(b) 順像法」の考え方》

無数の直線 PQ の動きを考えるとき，全体を見ていても最終結果のイメージが湧かないので，例えば直線 $x=1$ 上のみに注目してみましょう．あなたが監視役として，直線 $x=1$ 上の動きのみを注視するとイメージしてください．これはつまり

　　直線 PQ と直線 $x=1$ との交点

を追いかけることになります．このときの“動き”というのは y 座標の“動き”ですね．これは p の値により決まります．

具体的に考えてみます．直線

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\cdot 1-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(-2p^2+8p-3)}{3} \end{aligned}$$

となり，これは件の交点の y 座標を表します．p の 2 次関数なので平方完成をして，$1 \leqq p \leqq 2$ の範囲における y のとりうる値の範囲を考えればよいですね．

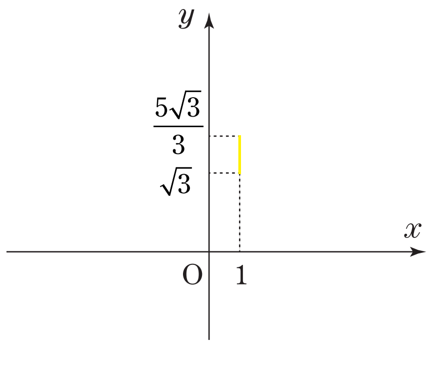
$$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(p-2)^2+\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

となるので，$1 \leqq p \leqq 2$ に注意すると y のとりうる値の範囲は，$p=1$ のときに最小，$p=2$ のときに最大となるので

$$\frac{\sqrt{3}(-2\cdot 1^2+8\cdot 1-3)}{3} \leqq y \leqq \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\iff \sqrt{3} \leqq y \leqq \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

と分かります．図示すれば下のようになります．



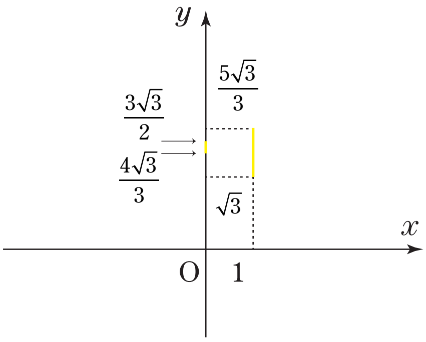
次に，直線 $x=0$ 上での動きを見てみましょう．$x=0$ を代入して

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\cdot 0-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$=\frac{-2\sqrt{3}(p^2-3p)}{3}$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

なので，$p=1$，2 のときに最小，$p=\dfrac{3}{2}$ のときに最大となるので

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となります．先ほどの結果と合わせると，下のようになります．



今はたった 2 つの線分ですが，直線 $x=0.01$，0.02，$0.03\cdots$ と無数に多くの直線上の動きを考え，そして各線分を描いていくと，求める領域が得られます．現実的にはキリがないので，$x=x_0$ のように一旦文字でおき y のとりうる値の範囲を求め，後から x_0 を動かせば良いです．このときの注意点としては，場合分けが起こるという点です．$x=x_0$ としたとき

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\cdot x_0-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\left\{-2p^2+2(x_0+3)p-3x_0\right\}}{3}$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{x_0+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}{x_0}^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$(=g(p)$ とおく$)$

となり，$1\leqq p\leqq 2$ における $g(p)$ のとりうる値の範囲を考える際に，放物線の対称軸：$p=\dfrac{x_0+3}{2}$ と定義域：$1\leqq p\leqq 2$ との位置関係で分ける必要があります．このとき，図形全体の対称性より，右側半分として $x_0\geqq 0$ の範囲で考えれば十分であることに気付けば楽ができます．

$$\frac{3}{2}\leqq\frac{x_0+3}{2}$$

に注意して，軸の位置で場合分けします．

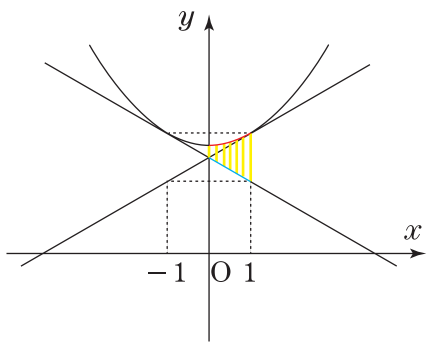
・ $\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{x_0+3}{2}\leqq 2 \iff 0\leqq x_0\leqq 1$ のとき

$$g(1)\leqq g(p)\leqq g\left(\frac{x_0+3}{2}\right)$$

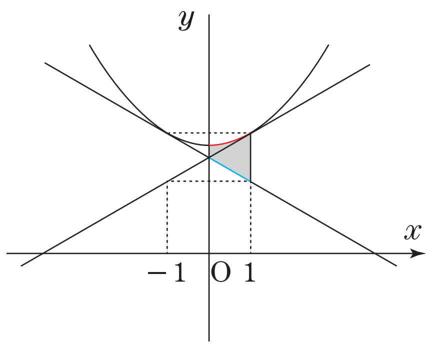
より

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}{x_0}^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となります．x_0 を $0\leqq x_0\leqq 1$ の範囲で動かすことにより，$0\leqq x\leqq 1$ においては上の不等式を踏まえ，下のように（黄色の）線分を何本も描くことができます．



これより，該当領域は下のようになります．



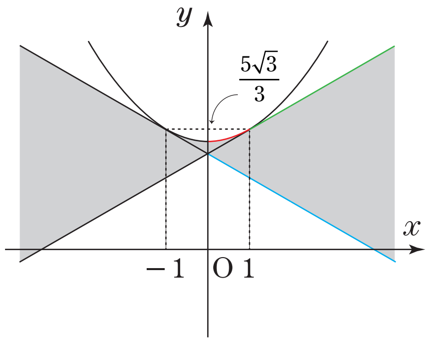
・ $2<\dfrac{x_0+3}{2} \iff x_0>1$ のとき

$$g(1) \leqq g(p) \leqq g(2)$$

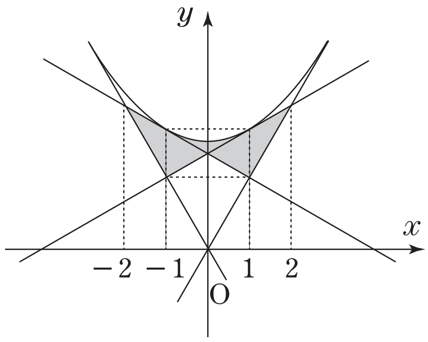
より

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

となります．先ほどのように $x>1$ の範囲で不等式を踏まえ線分をかき，y 軸に関する対称性も利用して直線 PQ の通過領域を一気に図示すると，下のようになります．



そして，上の領域を線分 $y=\sqrt{3}x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ と，線分 $y=-\sqrt{3}x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$ とで区切ることにより，求める線分 PQ の通過領域は下のようになります．



なお，直線 PQ の通過領域を求める際に，2 点 P，Q の存在範囲を踏まえ，x_0 について $-2 \leqq x_0 \leqq 2$ の範囲で考えれば十分であることに気付けば，さらに限定した $0 \leqq x_0 \leqq 2$ の範囲のみで考えることもできます．

（(*b*) の考え方はここまで）

《「(*c*) 包絡線の利用」の考え方》

p を動かすとき

$$\text{直線：} y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

は具体的にどのように動くでしょうか？この直線の式から読み取れる情報として

$$\text{傾き：}\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3},\quad y\text{ 切片：}-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

というものがありますが，大して役には立ちません．傾きは p に関して単調増加ですが，y 切片はそうではないですし，そもそも，増加・減少が分かったところで，アバウトな動きしか分かりません．

直線の動きとして分かりやすいのは

(A)　傾きが一定で，y 切片が動く

(B)　ある定点を通り，傾きが動く

といったものです．

(A) については，例えば

$$y=x+k$$

などが有名ですね．領域を用いた最大・最小の問題でよく登場します．

(B) については，例えば

$$y=kx+2$$

などが該当します．定点 $(0,\ 2)$ を通り傾き k の直線ですね．少し捻ったものですと

$$y=kx-k+2$$

などがあります．k について整理して

$$k(x-1)-(y-2)=0$$

とし，この等式が k の恒等式となる条件を考えます．これより

$$x-1=0 \text{ かつ } y-2=0$$

つまり

$$x=1,\ y=2$$

のときに k の値に関わらず必ず成り立つ，すなわち

$$(x,\ y)=(1,\ 2)$$

を必ず通ると判断し，定点通過を見抜きます．

　では今回の直線

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

がこのパターンかと言うと，残念ながらそうではないです．p について整理すると

$$2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)=0$$

となりますが，恒等式となる条件を考えて係数を 0 にしようにも，いきなり p^2 の係数が 2 なので不可能です．つまり定点を通過することは 100% ありえません．

　定点通過もなく，傾きが一定でもない．そんな直線が，分かりやすい動きをするのでしょうか？

　実は結論を先に述べると，この直線は常に

放物線 C：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

と接しながら動きます．実際に確認してみましょう．

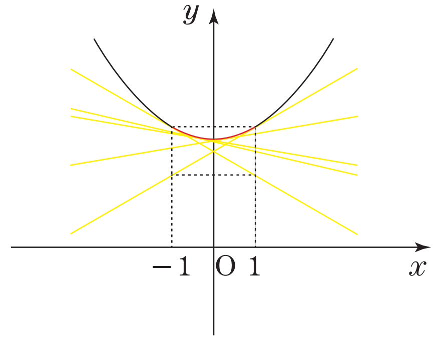
　直線と放物線 C とを連立すると

$$\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}x-\frac{2p(p-3)}{\sqrt{3}}$$
$$\iff x^2-2(2p-3)x+(4p^2-12p+9)=0$$
$$\iff \{x-(2p-3)\}^2=0$$

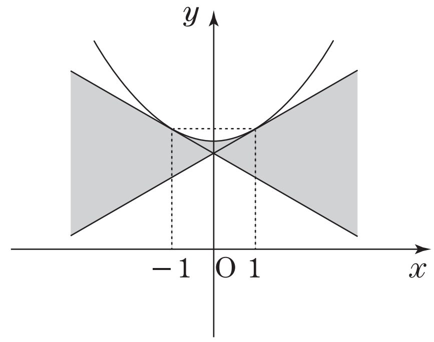
となり，$x=2p-3$ を重解に持ちます．つまり，2 つの図形は $x=2p-3$ である点で常に接すると言えます．言い方を変えれば，$p=1$ を代入したときに得られる直線

$$y=-\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

は，放物線 C 上の $x=2\cdot1-3=-1$ である点における接線です．$p=2$ として得られる直線は，C 上の $x=2\cdot2-3=1$ である点における接線です．このように $p=1$ から $p=2$ まで無数の p を代入して得られる無数の直線は全て C の接線（次図での黄色の直線）であり，その接点は $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲にあります（次図での赤色部分）．逆に，$-1\leqq x\leqq 1$ を満たす全ての点における接線を考えれば，直線の通過領域が手にとるように分かります．



　これより下図を得ます．



　最後に，線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ とで区切れば求める<u>線分 PQ</u> の通過領域が得られます．

　このように，直線 PQ の動きをハッキリと示してくれる，直線 PQ が常に接する放物線 C のことを

　　　直線 PQ の包絡線

といい，これを補助的に利用します．

　では，肝心要の，この包絡線はどうやって求めたら良いのでしょうか？これは，直線の方程式を p について整理した式

$$2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)=0$$

に対して，p の重解条件，つまり

$$\frac{D}{4}=0$$
$$\iff (x+3)^2-2(3x+\sqrt{3}y)=0$$
$$\iff y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

とすれば得られます．

ただし，答案にこの部分は書かない方が無難です．導出過程は省いて唐突に放物線 C を持ち出し，元の直線と接することを一言述べれば *OK* です．接することを確認する際，上記のように

連立 → 重解を持つことのチェック

でも良いですし

接点の x 座標を上手く選んで接線立式

→ 元の直線と一致する！

としても構いません．具体的に確認してみましょう．

$$h(x)=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

とおくと

$$h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

より，接点の x 座標を $x=2p-3$ とすると，接線は

$$\begin{aligned}
&y-h(2p-3)=h'(2p-3)\{x-(2p-3)\}\\
\iff\ & y-\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}(2p-3)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&\qquad=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\{x-(2p-3)\}\\
\iff\ & y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}
\end{aligned}$$

となります．これは確かに直線 PQ と一致していますね．ちなみに，$x=2p-3$ としたのは，$h'(x)$ の x に何を代入したら傾き $\dfrac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}$ が作れるか？ということからの逆算によるものです．

また，「何故 p の重解条件により包絡線が求まるのか」と疑問に感じるかと思いますので，やや結果論的ではありますが，説明をしておきます．

直線 PQ の方程式をパラメータ p について整理した式を，下のように平方完成します．

$$\begin{aligned}
&2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)=0\\
\iff\ & 2\left(p-\frac{x+3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}\right)=0
\end{aligned}$$

……①

ここで

$$\sqrt{3}y-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}=0$$

で表される図形 C を考えます．これと直線の方程式①とを連立したとき

$$2\left(p-\frac{x+3}{2}\right)^2=0$$

がアッサリと導かれるので，C と直線 PQ が接することが確認できます．

では，このとき考えた図形 C が何なのかと言えば

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}y-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}=0\\
\iff\ & y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

となり，先ほどの包絡線です．

上では，p の 2 次関数と見て頂点の座標が 0 となるときを考えていますが，これが「判別式＝0」と同値であることはいいでしょう．そもそも p の重解条件を考えているので，その式と連立したら p が重解となるのは当たり前ですね．

ただし，重解条件を用いる包絡線の求め方は

パラメータの 2 次式のとき限定

という側面があります．パラメータの 3 次式や，一般の式については使えません．ですので最後に，少々複雑ですが，一般の場合に関して書いておきます．

＜方程式 $f(x,\ y,\ t)=0$ で表される図形の包絡線＞

$f(x,\ y,\ t)$ について，x，y を定数として

$$f(x,\ y,\ t)=g(t)$$

とおくとき

$$\begin{cases} g(t)=0\\ g'(t)=0\end{cases}$$

から t を消去して得られる x，y の式が包絡線を表す方程式である．

証明は大学レベルのため控えます．

（(*c*) の考え方はここまで）

以上，(a)，(b)，(c) の 3 つの考え方について確認してきました．ここからは，3 つの考え方に基づく模範解答を載せていきます．（重複する部分は省略します）

《(a) を用いた模範解答》

$\mathrm{P}\left(p,\ \sqrt{3}p\right)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ -\sqrt{3}q\right)$ とおくと

$$0 \leqq p \leqq 2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$-2 \leqq q \leqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

であり

$$\mathrm{OP}=2p,\ \mathrm{OQ}=-2q$$

より

$$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 \iff p-q=3 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

$$③ \iff q=p-3$$

より，② に代入して

$$0 \leqq 3-p \leqq 2 \iff 1 \leqq p \leqq 3$$

となるので，① と合わせて

$$1 \leqq p \leqq 2$$

である．また，$\mathrm{Q}\left(p-3,\ -\sqrt{3}(p-3)\right)$ となるので，直線 PQ の方程式は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{\sqrt{3}p-\left\{-\sqrt{3}(p-3)\right\}}{p-(p-3)}(x-p)$$
$$\iff y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$

と表せる（☆）．

まず，直線 PQ の通過領域を求める．

$$y=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}x-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}$$
$$\iff 2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)=0$$

と変形でき．直線 PQ の通過領域は，この p の 2 次方程式が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解を持つための x，y の条件として与えられる．

$$f(p)=2p^2-2(x+3)p+(3x+\sqrt{3}y)$$

とおくと

$$f(p)=2\left(p-\frac{x+3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}y-\frac{9}{2}$$

であり，求める条件は

(i)　$f(1)\cdot f(2) \leqq 0$

または

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{3}y-\dfrac{9}{2} \leqq 0 \\ 1 \leqq \dfrac{x+3}{2} \leqq 2 \\ f(1) \geqq 0 \\ f(2) \geqq 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．

(i) について

$$\left(x+\sqrt{3}y-4\right)\left(-x+\sqrt{3}y-4\right) \leqq 0$$

より

$$x+\sqrt{3}y-4 \geqq 0 \text{ かつ } -x+\sqrt{3}y-4 \leqq 0$$

または

$$x+\sqrt{3}y-4 \leqq 0 \text{ かつ } -x+\sqrt{3}y-4 \geqq 0$$

である．すなわち

$$y \geqq -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ かつ } y \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

または

$$y \leqq -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ かつ } y \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

である．

(ii) について

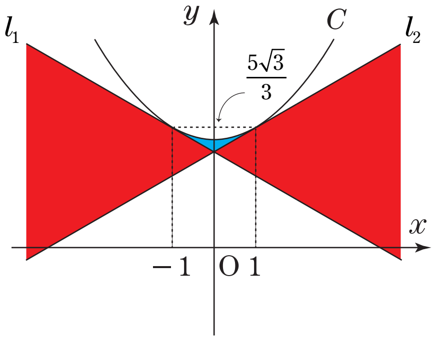
$$\begin{cases} y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ -1 \leqq x \leqq 1 \\ y \geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

である．

よって

$$C: y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$l_1: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$l_2: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

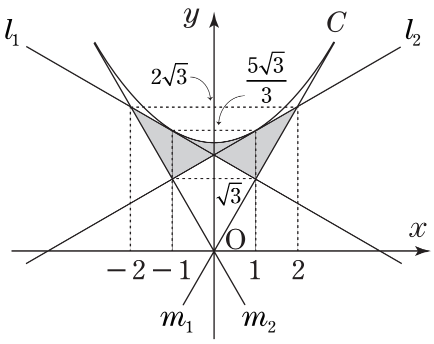
とすると，直線 PQ の通過領域は次図の色付き部分である（境界含む）．



ここで，2 点 P，Q はそれぞれ線分

$y=\sqrt{3}x\ (0\leqq x\leqq 2)$，$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq 0)$ 上

にあることを踏まえると，線分 PQ の通過領域は次図の色付き部分である（境界含む）．



ただし

$$m_1: y=\sqrt{3}x$$
$$m_2: y=-\sqrt{3}x$$

とする．

（(a) を用いた解答終わり）

《(b) を用いた（☆）以降の模範解答》

まず，直線 PQ の通過領域を求める．

$x=x_0$ と固定して p を動かすときの y のとりうる値の範囲を考える．y 軸に関する対称性より，$0\leqq x_0$ の範囲で考えれば十分である．

$$\begin{aligned} y&=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}\cdot x_0-\frac{2\sqrt{3}p(p-3)}{3}\\ &=\frac{\sqrt{3}\left\{-2p^2+2(x_0+3)p-3x_0\right\}}{3}\\ &=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{x_0+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}{x_0}^2+\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

（$=g(p)$ とおく）

であるから

$$\frac{3}{2}\leqq\frac{x_0+3}{2}\leqq\frac{5}{2}$$

に注意して，軸の位置で場合分けする．

(i) $\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{x_0+3}{2}\leqq 2 \iff 0\leqq x_0\leqq 1$ のとき

$$g(1)\leqq g(p)\leqq g\left(\frac{x_0+3}{2}\right)$$

より

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}{x_0}^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である．

(ii) $2<\dfrac{x_0+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2} \iff 1<x_0\leqq 2$ のとき

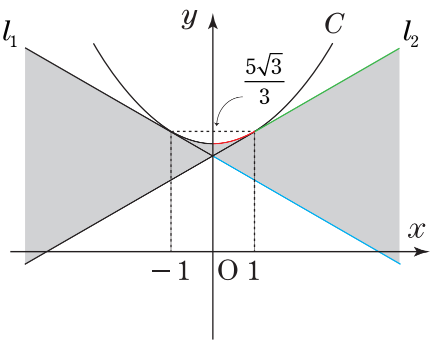
$$g(1)\leqq g(p)\leqq g(2)$$

より

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

である．

したがって，x_0 を $0 \leqq x_0$ の範囲で動かすことにより，y 軸に関する対称性を踏まえると，直線 PQ の通過領域は下図の色付き部分である（境界含む）.



ただし

$$C: y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$l_1: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$l_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

である.

（以下，線分 PQ の通過領域を求めるところは (a) と同様）

（(b) を用いた解答終わり）

《(c) を用いた（☆）以降の模範解答》

まず，直線 PQ の通過領域を求める.

ここで

$$放物線 C：y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

を考える．放物線 C と直線 PQ とを連立すると

$$\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}x - \frac{2p(p-3)}{\sqrt{3}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2(2p-3)x + (4p^2 - 12p + 9) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \{x - (2p-3)\}^2 = 0$$

となり，$x = 2p-3$ を重解に持つので，2 つの図形は $x = 2p-3$ である点で常に接する．つまり，直線 PQ は放物線 C 上の $x = 2p-3$ である点における接線であると分かる.

いま，$1 \leqq p \leqq 2$ より $-1 \leqq 2p-3 \leqq 1$ であるから，接点の x 座標の範囲は $-1 \leqq x \leqq 1$ である.

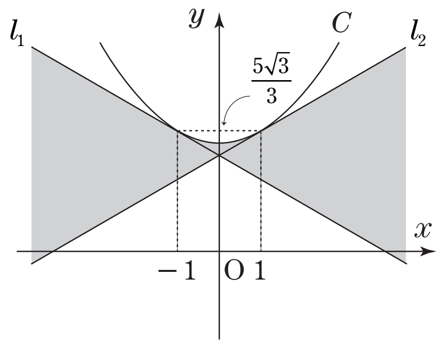
$x = -1$ である点における接線 l_1 が

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

であり，$x = 1$ である点における接線 l_2 が

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

であることに注意すると，直線 PQ の通過領域は下図の色付き部分である（境界含む）.



（以下，線分 PQ の通過領域を求めるところは (a) と同様）

（(c) を用いた解答終わり）

《最後に》

いかがだったでしょうか？通過領域に関する，3 パターンの解法を見せました．

ちなみに，東大の原題（理系）は下の通りです．

座標平面の原点を O で表す．線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1)　s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2)　D を図示せよ．

---

(1) を見て，先ほどの解法のうち，東大がどの解法を望んでいるか分かりますか？この設問は

x 座標を $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で固定するとき，
y 座標のとりうる値の範囲を求めよ

と読み替えることができるので

(*b*) 順像法

による解法を示唆しています．この解法に慣れておらず

設問の意味が分からなかった

という受験生も少なからずいたようです．

東大の場合，“ありがた迷惑”な誘導がつくこともあるので，(2) を先に自分の方法でやるというのも 1 つの手として考えられます．

((1) が白紙の場合，(2) の採点方法がどうなるかは謎のヴェールに包まれていますが・・）

また，同じ年度である 2014 年名古屋大学にも，下記の問題が出ています．

《文系》

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．

(1)　2 点 P，Q を通る直線 l の方程式を求めよ．

(2)　a は定数とし，直線 $x=a$ と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく，t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ．

(3)　t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

《理系》

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

文系の方にのみ誘導がついていますが，こちらも同じく「(*b*) 順像法」に関するものです．同じ年度に同じ解法指定での出題となると，何か裏があるのではないかと勘ぐりたくなりますね（笑）．

なお，この名古屋大学の問題と完全に同じ数字の問題が，2009 年横浜国立大学で出題されています（誘導は違いますが）．

様々な入試問題に幅広く触れ，典型問題については解法の流れそのものを覚えてしまうぐらいのつもりで勉強しましょう．高度なレベルでの暗記数学ですね．

それでは，長くなりましたが，今回はここまでです．ではまた次回．

（研伸館　野口）