

強者の戦略

今回の問題は【2002 兵庫医科大学】の入試問題に【2003 秋田県立大学 システム科学技術学部】の入試問題を融合して出題しました。

それでは、まず問題の確認です。

問題

狂牛病にかかっているかどうかを診断する検査法がある。すなわち、この検査に対して陽性であれば狂牛病にかかっていると判断され、陰性であれば狂牛病にかかっていないと判断される。この検査法は信頼すべきものであり、実際病気にかかっている牛を検査すれば、 p の確率で陽性になり、 $1-p$ の確率で陰性になることがわかっている。また、病気にかかっていない牛を検査すれば、 q の確率で陽性になり、 $1-q$ の確率で陰性になることがわかっている。狂牛病にかかっている牛が確率 r で存在するとして、以下の問いに答えよ。

- (1) この検査で陽性になった牛が、実際に病気にかかっている確率 S を求めよ。
- (2) $p=0.98$, $q=0.08$, $r=0.001$ のとき、検査で陽性になった牛が、実際に狂牛病にかかっている確率は何%になるか。
- (3) (2)の確率が与えられているとき、10000頭の牛を対象にしてこの検査を行えば、陽性になる牛は何頭出ることになるか。
- (4) (1)で求めた S において、 $q=0.1$, $r=0.001$ と固定し、 p のみを0から1まで動かしたときの S の変化を pS 平面にグラフで描け。
- (5) (1)で求めた S において、 $p=1$, $r=0.001$ と固定し、 q のみを0から0.1まで動かしたときの S の変化を qS 平面にグラフで描け。

続いて、解答です。

[解答]

- (1) 事象 A , B を

A : ある牛が検査で陽性になる

B : ある牛が病気にかかっている

とおくと

$$P(A) = rp + (1-r)q$$

$$P(A \cap B) = rp$$

であるから、求める確率 S は

$$S = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{rp}{rp + (1-r)q}$$

である。

(補足1)

問題文に「この検査で陽性になった牛」とあるので、条件付き確率を使います。条件付き確率においては

・条件にあたる事象 A

・ A が起こったという条件のもとで

確率を考えたい事象 B

の2つの事象をいかに的確に読み取るか、が勝負の分かれ目です。基本的には「～であった」「～であるとき」「～という条件のもとで」という文章の「～」にあたる部分が事象 A 、「……の確率を求めよ」の「……」にあたる部分が事象 B となります。

過去の入試問題では、ごく稀に問題文から空気を読んで、条件付き確率だと見破らないといけない問題もありますので、そういう問題で困ったときは、すぐに数学科講師に相談するようにしましょう。

[解答続き]

- (2) (1)の結果に、 p , q , r の値を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{0.001 \cdot 0.98}{0.001 \cdot 0.98 + 0.999 \cdot 0.08} \\ &= \frac{98}{98 + 999 \cdot 8} \\ &= \frac{49}{4045} \end{aligned}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{49}{4045} \cdot 100 = \frac{980}{809} (\%)$$

である。

- (3) (1)の $P(A)$ より、求める頭数は

$$\begin{aligned} &10000 \cdot P(A) \\ &= 10000 \{0.001 \cdot 0.98 + 0.999 \cdot 0.08\} \\ &= 9.8 + 999 \cdot 0.8 \\ &= 9.8 + (1000 - 1) \cdot 0.8 \\ &= 809 \end{aligned}$$

強者の戦略

より, 809 (頭) である.

(補足 2)

(2), (3) からは, この検査の精度が決まったときに, 現実にはどの程度の影響があるか, について感じ取れます. 今回のように $p=0.98$, $q=0.08$, $r=0.001$ のときだと, 陽性と判定が出ていても, その中で病気にかかっている牛は実際には $\frac{980}{809} \approx 1.2$ (%) しか

存在していません. また, 陽性の判定が出た牛は (実際には病気にかかっていなくても) 処分しなくては いけませんから, 10000 頭中 809 頭もの牛を失うこと になります.

よって, p の値を高め, q の値を低く抑えること によって, 検査の精度を上げていくことが必要 になります. (4), (5) では p , q の一方を固定して, もう 一方のみを動かしたときの S の変化を見てみましょ う.

[解答続き]

(4) (1) の答えに, q , r の値を代入すると

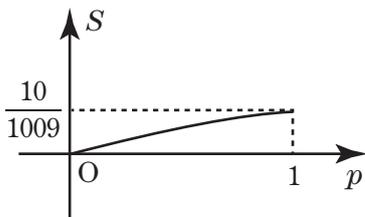
$$\begin{aligned} S &= \frac{0.001p}{0.001p + 0.999 \cdot 0.1} \\ &= \frac{p}{p + 99.9} \\ &= 1 - \frac{99.9}{p + 99.9} \end{aligned}$$

となる. これは pS 平面において

$$p = -99.9, S = 1$$

を漸近線にもつ, 直角双曲線 (の一部) となる.

よって, 定義域内のグラフの概形は次図.



(5) (1) の答えに, q , r の値を代入すると

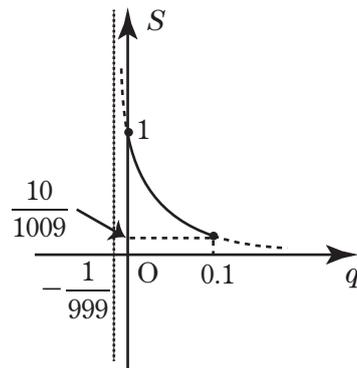
$$\begin{aligned} S &= \frac{0.001}{0.001 + 0.999 \cdot q} \\ &= \frac{1}{999q + 1} \end{aligned}$$

となる. これは qS 平面において

$$q = -\frac{1}{999}, S = 0$$

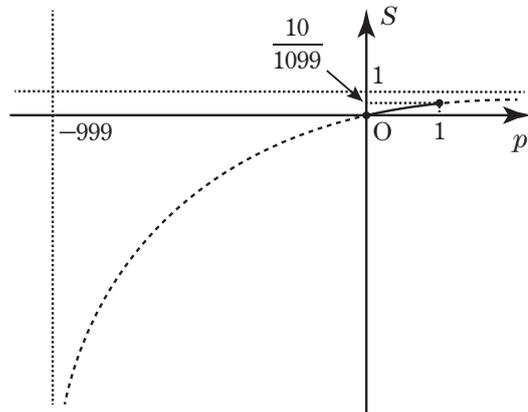
を漸近線にもつ, 直角双曲線 (の一部) となる.

よって, 定義域内のグラフの概形は次図.



(補足 3)

(4) のグラフを漸近線も含めて書くと, 概形は以下 のようになります.



このグラフは, (5) のグラフに比べると漸近線, 特 に S 軸に平行な漸近線が定義域よりもかなり離れた ところにあるため, 直角双曲線のグラフの一部なの ですが, ほぼ直線に近い変化をします. よって S の 値を大きくするために, p , q の値をより良いもの に していくとき, p の値を大きくしたほうが q の値を 小さくするよりも, より直接的に S に影響を与えそ

強者の戦略

うです。

また、牛の病気が人の命に関わるほど重大な病気であり、病気にかかっている牛を間違いなく処分しなければならないような状況の場合は、 $p=1$ となるような検査が望まれます ($p=1$ であれば、病気にかかっている牛は間違いなく陽性と判定されるからです)。この際、実際には病気ではないのに間違っ
て陽性と判定される牛を減らすことができれば、無駄に処分する牛を減らすことができ理想的です。ですから、当然 q を小さくしたいわけですが、(5) のグラフからわかるように、 q を 0.1 から少し小さくした程度では、激しい変化は現れません。思い切っ
て、 q を 10 分の 1 にできるぐらいの技術革新があると、 S が一気に高まることとなります。

(最後に)

条件付き確率は、最近の課程だと 1997 年度入試から 2005 年度入試までの間「数学 B」の確率分布という単元で扱われていました。ただその頃は、ベクトルと複素数平面も「数学 B」で扱われており、この 2 単元を選択する大学が多数であったため、国公立大二次試験や私立大一般入試における、条件付き確率の登場頻度は少なめでした。

ですが、現在の新課程では、条件付き確率は「数学 A」で扱われ、多くの大学が「数学 A」はすべての単元を扱う可能性がある、としています (文部科学省発表の指導要領においては「数学 A」は 3 つの単元から 2 つの単元を選択すると書かれているので、それに配慮する、としている大学もあります。詳細は、必ず各大学の募集要項を確認のこと)。ですから、条件付き確率の出題頻度が高まるのではないかと予想されます。特に、医学部、農学部、薬学部などでは、今回扱ったような問題で、実際に行われていることに絡めて出題されることもあるでしょう。余裕がある人は、古い課程の条件付き確率の入試問題にも目を向けてみてはどうでしょうか。

(数学科 中西)