強者の戦略

今回の問題は完答できたでしょうか？まずは問題の確認をしておきましょう．

数学第１問（III）

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta,\ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

(1)　一般項 b_n を求めよ．

(2)　すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

《考え方》

(1)「一般項を求めよ」とありますが，要は定積分の計算です．a_n と b_n は被積分関数が似ていますが，a_n は計算することができません．後ろに $\cos\theta$ があるかないかで変わってきます．ここで押さえておきたいポイントは

$f(\sin\theta)\cos\theta$ の形の積分は f の積分
$f(\cos\theta)\sin\theta$ の形の積分は $-f$ の積分

となることです．具体的には

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C\ \ (C：積分定数)$$

の $g(x)$ の部分が $\sin\theta$ または $\cos\theta$ となっているわけです．この部分はしっかりと授業を聞いていた人なら解けたのではないでしょうか？

(2)　a_n は計算できない定積分です．直接計算できない定積分の値を評価するには

①　積分区間内で被積分関数を評価
②　面積として評価する

の２つを押さえておきましょう．今回は ① になります．これも確認しておきます．

$a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\leqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ．

等号は $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)=g(x)$ が成り立つとき（$f(x)$ と $g(x)$ が恒等的に等しいとき）

今回は積分区間が$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ なので b_n に含まれる $\cos\theta$ は$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$をみたしています．
これを用いて a_n を中央にもってくる不等式を作れば示したい不等式が出てきます．

(3)　個人的にはこれは解けていてほしいと思います．こういう小問に分かれている問題では前の問題で示したことや求めた値などを使うことが非常に多いです．たとえ (2) で詰まっていたとしても (3) を解かずに白紙で終わらさないようにしましょう．必ず (2) の結果を使って (3) を考えて下さい．
ここまで言えば「不等式の証明→はさみうちの原理」に気づくと思います．念のためはさみうちの原理を確認しておきます．

十分大きな n で $b_n \leqq a_n \leqq c_n$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

たまに$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \leqq \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} c_n$としている答案を見かけますが，これは絶対にやってはいけません！
はさみうちの原理で示していることは「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すること」と「その極限値が α であること」の 2 つです．極限が存在することを示していない $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ をいきなり書いているので確実に減点されます．答えが当たっていても答案に欠陥(言葉不足や論理矛盾など)があれば満点はとれません．しっかりとした答案が書けるように日頃から練習することは非常に重要なことですね．受験生の方は秋からは答案を添削してもらうようにしましょう．さて，長くなってきましたので解答に移ります．

《解答》

(1)

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}(\sin\theta)' d\theta \\
&= \left[\frac{1}{n} e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n}\right)
\end{aligned}
$$

(2)　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$であるから

$$
\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta} d\theta \leqq b_n \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta} d\theta
$$

となり，$a_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta} d\theta$ より

$$
\frac{\sqrt{3}}{2} a_n \leqq b_n \leqq a_n \iff b_n \leqq a_n \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} b_n
$$

である．

(3)　n が十分大きいとき，(2) から

$$nb_n \leqq na_n \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} nb_n$$

となり，(1) より $b_n > 0$ であり，底 $e > 1$ なので

$$\log(nb_n) \leqq \log(na_n) \leqq \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}} nb_n\right)$$

$$\iff \frac{1}{n}\log(nb_n) \leqq \frac{1}{n}\log(na_n) \leqq \frac{1}{n}\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}} nb_n\right) = \frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}\log(nb_n)$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log e^{\frac{1}{2}n}\left(1-e^{-n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log e^{\frac{1}{2}n} + \log\left(1-e^{-n}\right)\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log\left(1-e^{-n}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}\log\left(nb_n\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

となる．ゆえに，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(na_n\right) = \frac{1}{2}$$

である．

《あとがき》

今回の問題は 2013 年に東北大学で出題されたものです．入試問題ではさまざまな単元が融合して出てきますが，高 2 のみなさんは 1 つずつマスターして下さい．受験生のみなさんはこうした内容を確認することに加えて，答案作成時に採点者に意図が伝わるか，内容の不足がないか，もちろん計算ミスがないかをきちんと確認した上で適切な添削指導を受けて下さい．それでは今回はここまで．

（数学科　竹本）