強者の戦略

今回の問題は【2014 広島大学 理学部（後期）】の入試問題を少し改題して出題しました．同じ年度では【2014 大阪医科大学】でも，今回出題したような普段見慣れない設定に対して正しく考察できるかを問う問題が出題されています．

それでは，まず問題の確認です．

> 問題
>
> 多人数でじゃんけんをすると通常のじゃんけんのルールの下ではあいこになることが多いので，次のような新ルールを考える．
>
> (i)　グー，チョキ，パーのうち 1 種類または 2 種類の手が出たときは，通常のじゃんけんのルールに従う．
>
> (ii)　グー，チョキ，パーすべての手が出たときは，出した手によってグループに分け，次のように決める．
>
> (a)　最も人数の少ないグループが 1 組の場合には，そのグループを勝者とする．
>
> (b)　最も人数の少ないグループが 2 組できた場合には，じゃんけんで勝つほうの手を出したグループを勝者とする．
>
> (c)　3 グループとも同じ人数の場合には，あいことする．
>
> このとき，次の問いに答えよ．
>
> (1)　A 君を含む 4 人で 1 回のじゃんけんをする．A 君はチョキを出し，残り 3 人の各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．A 君 1 人だけ勝つ確率を，通常のじゃんけんのルールを適用した場合と新ルールを適用した場合のそれぞれについて求めよ．
>
> (2)　$n \geqq 2$ とする．新ルールの下で n 人が 1 回のじゃんけんをするとき，あいこになる確率を n を用いて表せ．ただし，各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．
>
> (3)　$n \geqq 4$ とする．新ルールの下で n 人が 1 回のじゃんけんをするとき，1 人だけが勝つ確率を n を用いて表せ．ただし，各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．

続いて，解答です．

［解答］

(1)　通常ルールで A 君 1 人が勝つのは，他の 3 人がパーを出すときゆえ，その確率は

$$\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

である．

新ルールで A 君 1 人が勝つときを考える．まず，ルール (i) で勝つ場合は (1) より

1 通り

である．次に，ルール (ii) で勝つためには，3 種類の手が出ることが必要である．今，4 人で行っているので，ルール (ii)–(a) で勝つ場合は，グーとパーを出す人が A 君以外にそれぞれ 2 人以上，合わせて 4 人以上いるときゆえ，起こりえない．よって 0 通り．ルール (ii)–(b) で勝つ場合は，残り 3 人がパー．グー，グーを出すときゆえ，誰がパーを出すかを選んで

$${}_3\mathrm{C}_1=3 \quad \text{通り}$$

である．以上より，求める確率は

$$\frac{1+0+3}{3^3}=\frac{4}{27}$$

である．

（補足 1）

(1) では A 君はチョキを出すと決まっているので，確率の分母は残り 3 人の手の出し方を考えて $3^3=27$ 通りになります．もし $3^4=81$ 通りで考えないと気持ち悪いと感じるならば，例えば (1) の前半部分においては事象 A，B を

A：A 君がチョキを出す

B：A 君 1 人だけが勝つ

とおき，事象 A が起きたという条件の下で事象 B が起こる条件付き確率を考えると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{1}{3^4}}{\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{27}$$

となり，正しい答えと一致します．

［解答続き］

(2)　ルール (ii)–(*c*) によるあいこは，n が 3 の倍数のときにしか起こらないことに注意する．

（ア）$n=3m-1,\ 3m+1$（m は自然数）のとき

あいことなるのは，全員が同じ手を出した場合のみなので，その確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$$

である．

（イ）$n=3m$（m は自然数）のとき

ルール (i) であいこになる場合は，（ア）より

${}_3\mathrm{C}_1=3$　通り

ある．次にルール (ii)–(*c*) であいこになる場合はグー，チョキ，パーが m 人ずつのときゆえ

$${}_{3m}\mathrm{C}_m\cdot{}_{2m}\mathrm{C}_m=\frac{(3m)!}{(m!)^3}\ \text{通り}$$

ある．これらは互いに排反なので，その確率は

$$\frac{3+\dfrac{(3m)!}{(m!)^3}}{3^{3m}}=\frac{3(m!)^3+(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}$$

$$=\frac{3\left\{\left(\dfrac{n}{3}\right)!\right\}^3+n!}{3^n\left\{\left(\dfrac{n}{3}\right)!\right\}^3}\ \left(\because\ m=\frac{n}{3}\right)$$

である．

以上より，求める確率は，m を自然数として

$n=3m-1,\ 3m+1$ のとき　$\dfrac{1}{3^{n-1}}$

$n=3m$ のとき　$\dfrac{3\left\{\left(\dfrac{n}{3}\right)!\right\}^3+n!}{3^n\left\{\left(\dfrac{n}{3}\right)!\right\}^3}$

である．

（補足 2）

元々の入試問題には (2) の問題がなく「あいこの確率を減らしたのに，なんであいこの確率を問わへんねん！」と思い追加させていただきました．

通常ルールでは，多人数でのあいこを考えるときはパターンが多岐にわたるため

（通常ルールで）あいこは余事象の利用

が基本ですが，新ルールではあいこになるパターンが少ないので，余事象を利用せず直接考えるほうが簡単に求めることができます．「あいこは余事象で」と覚えるよりも

直接，確率を求めるのが面倒

→余事象の利用

と理解しておきましょう．

また，（イ）においてルール (ii)–(*c*) であいこになる場合を考える際，$3m$ 人を

「グーを出す m 人」

「チョキを出す m 人」

「パーを出す m 人」

の 3 グループに分けます．人数は同じですが，どの手を出すかで各グループには区別がつくため

同人数でも区別がつけば

（3! で）割らない

ことに注意しておきましょう．

［解答続き］

(3)　1 人だけが勝つ場合の数について

勝つ人の選び方　${}_n\mathrm{C}_1=n$　通り

勝つ人の手の出し方　${}_3\mathrm{C}_1=3$　通り

である．この 2 つを選んだときの残りの人の手の出し方を考える．

まず，ルール (i) で勝つときは，残りの人が全員，勝つ人に負ける手を出す場合ゆえ

1 通り

である．

次に，ルール (ii)–(*a*) で勝つときは，$n=4$ のときは (1) より 0 通り．$n\geqq5$ のときは，例えば勝つ人の手をチョキとすると，グーもパーも 2 人以上が出した場合ゆえ，残りの $(n-1)$ 人からグーを出す人の選び方を考える．パーを出す人が少なくとも 2 人い

ることから，グーを出す人数は

$$2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ (n-3)\quad 人$$

の場合があるので

$$\begin{aligned}
&{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}\\
&=\sum_{k=2}^{n-3}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k-({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\cdot1^k\cdot1^{(n-1)-k}-2\{1+(n-1)\}\\
&=(1+1)^{n-1}-2n\\
&=2^{n-1}-2n
\end{aligned}$$

通りとなる．これは $n=4$ のときも

$$2^{4-1}-2\cdot4=0$$

となり成立する．

最後に，ルール (ii)–(b) で勝つときは，勝つ人の手をチョキとすると，1 人がパーで残りの $(n-2)$ 人がグーを出す場合ゆえ，パーを出す人の選び方を考えて

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1=n-1\quad 通り$$

である．

以上 3 つのパターンは互いに排反なので，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{n\cdot3\cdot\{1+(2^{n-1}-2n)+(n-1)\}}{3^n}\\
&=\frac{n(2^{n-1}-n)}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

である．

（補足 3）

通常ルールの場合は，勝つ人の手の出し方が決まると負ける人の手の出し方は 1 通りに決まるため，何人かが勝つ確率を求めるときの分子は

「（勝つ人の選び方）×（勝つ人の手の出し方）」

のみで求まるのですが，今回の新ルールにおいては，特にルール (ii) で勝つ際に負ける人の手の出し方に様々なバリエーションがあるため

「負ける人の手の出し方」

も考えて，かけ算しなければなりません．

(1) でルール (ii)–(a) で勝つときを正しく考察できていれば，後はそれを n 人に対して行えるかどうかが勝負になります．勝つ人の出す手以外の 2 種類の手のうち，いずれか一方を出す人の人数を決めれば，残りの人の出す手は 1 通りに決まります．n が絡むために，直接数えると Σ が登場しますが

コンビネーションの Σ は二項定理

に従って, k の範囲を調整しましょう．ちなみに「直接求めるのが面倒 → 余事象の利用」に従って考えると

$(n-1)$ 人がグーまたはパーを出す

ときの場合の数から

全員がグー，または，全員がパー

1 人だけがグー，または，1 人だけがパー

となるときの場合の数を引いて

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}-(2+{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot2)\\
&=2^{n-1}-\{2+2(n-1)\}\\
&=2^{n-1}-2n
\end{aligned}$$

となり，二項定理を使わずに求めることもできます．

また，今回は (1) があるため気づきやすいのですが，$n=4$ のときは (ii)–(a) で勝つ場合が起こり得ません．確率 0 の場合が混ざると，分母に 0 が来てしまったりして答案に綻びができることがあるので

起こりえない場合は，真っ先に片付ける

ようにするのがオススメです．

（最後に）

以前，とある大学の教授が「IAIIB の範囲で，高校生の考える力を見られるのは，場合の数・確率と空間図形ぐらいですね」と言ったそうです．どちらの単元も，今回の問題のように「パターンにあてはめて解けるわけではないけれど，自分の知っている公式・解法を正しく組み合わせれば，答えに辿り着ける」問題を作りやすいからだと思います．

今後も，皆さんが興味を持てそうな設定の問題があれば取り上げていきますので，是非，初めて見る設定の問題でも果敢に取り組む勇気を身につけて

いって下さい.

（数学科　中西）